11/2 — GK Mathematik	Datum
Mathematik-Klausur — Steckbrief- und Integralrechnung	*28. Juni 2006*

Name: ______________________________

Schreib bitte sauber und deutlich! Schreib auf jedes Blatt Deinen Namen. Gib bei jeder Berechnung die grundlegende Formel an! Bearbeitungszeit ist 90 min. Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

1. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$ ist, hat im Punkt $T(-1|-4)$ ein relatives Minimum. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Funktion. [12]

2. Berechne die Stammfunktionen $F(x)$ folgender Funktionen $f(x)$, wobei die Integrationskonstante C unbestimmt ist. [8]

   a) $f(x) = \frac{2}{3}x^5 - 4x^2 + 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^9 - 7x^8 + 2x^6 - 2x^5$

   c) $f(x) = 18x^{31} - 2x^{-2} + 9x^{-3}$ d) $f(x) = -11x^{1000} + 7x^9 - 3x^7 - 22x^4$

3. Berechne das Integral. [10]

   a) $\int_2^4 (6\frac{1}{3}x^3 + 4x^2)\,dx$ b) $\int_3^6 (2x + \frac{1}{x^2})\,dx$

4. Berechne das Integral. [10]

   a) $\int_1^3 \frac{1}{4}(1 - x^2)\,dx$ b) $\int_{-1}^3 (-\frac{1}{2}x^2)\,dx$

5. Berechne die Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse einschließt. (Tipp: Mach Dir zunächst eine Skizze der Funktionsgraphen und bestimme die Nullstellen.) [20]

   a) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - x^2$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	5	**Summe**
Punktzahl:	12	8	10	10	20	60
Davon erreicht:						

11/2 — GK Mathematik	Datum
Mathematik-Klausur — Lösungen	*28. Juni 2006*

Aufgabe 1

Ausführliche Lösungshinweise: Zunächst einmal schreibst Du die allgemeine Funktion 3. Grades auf: $f(x) \;=\; a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Dazu die erste Ableitung (wegen der notw. Bedingung für das rel. Minimum):

$f'(x) \;=\; 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

Und nun versuchst Du aus den gegebenen Informationen die Bestimmungsgleichungen aufzustellen:

$f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. wir haben eine Nullstelle bei $x = 0 \Rightarrow f(0) \;=\; a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \;=\; d \;=\; 0 \Rightarrow d = 0$. Die Punktsymmetrie erzwingt aber auch $b = 0$, da die Funktion nur ungerade Exponenten haben kann: $f(x) \;=\; a \cdot x^3 + c \cdot x$.

Punkt $T\ (\ -1 |\ -4\ ) \Rightarrow f(-1) \;=\; a \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1) + d \;=\; -a - c \;=\; -4$

Tiefpunkt $T\ (\ -1 |\ -4\ ) \Rightarrow f'(-1) \;=\; 3a \cdot (-1)^2 + c \;=\; 3a + c \;=\; 0$

Das Gleichungssystem besteht aus den beiden Gleichungen $\quad I \quad -a - c = -4 \quad$ und $II \quad 3a + c = 0$. Addition dieser beiden Gleichungen führt zu $2a = -4 \Rightarrow a = -2$ und dies eingesetzt in Gleichung I zu $c = 6$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = -2x^3 + 6x$.

Aufgabe 2

a) $F(x) = \frac{1}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $F(x) = \frac{1}{40}x^{10} - \frac{7}{9}x^9 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6 + C$

c) $F(x) = \frac{9}{16}x^{32} + 2x^{-1} - 4\frac{1}{2}x^{-2} + C$

d) $F(x) = -\frac{1}{91}x^{1001} + \frac{7}{10}x^{10} - \frac{3}{8}x^8 - 4\frac{2}{5}x^5 + C$

Aufgabe 3

a) $\displaystyle\int_2^4 (6\tfrac{1}{3}x^3 + 4x^2)\,dx = \left[6\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{4}{3}x^3\right]_2^4 = 454\tfrac{2}{3}$

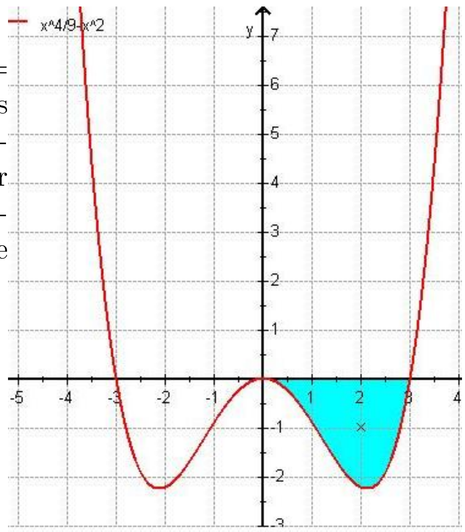
b) $\displaystyle\int_3^6 (2x + \tfrac{1}{x^2})\,dx = \left[x^2 - \tfrac{1}{3}x^{-1}\right]_3^6 = 27\tfrac{1}{6}$

Aufgabe 4

a) (vgl. Buch S. 140, Fig. 2) $\int_1^3 \frac{1}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]_1^3 = -1\frac{2}{3}$

b) (vgl. Buch S. 141, Fig. 1) $\int_{-1}^3 (-\frac{1}{2}x^2)\,dx = -\frac{1}{6}\left[x^3\right]_{-1}^3 = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}$

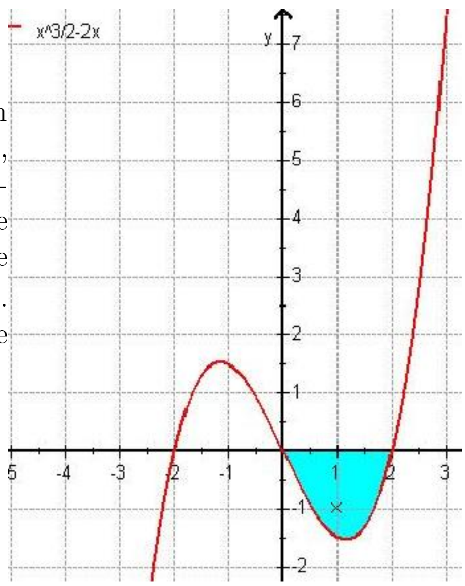
Aufgabe 5



a) Nullstellen von $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - x^2$ sind $x_N = 0 \vee x_N = \pm 3$. $x_N = 0$ ist hierbei doppelte Nullstelle, was ein Hinweis auf ein lokales Maximum ist. Da $f(x)$ nur gerade Exponenten hat, ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse und wir können die halbe eingeschlossene Fläche durch Integration von $x = 0$ bis $x = 3$ bestimmen. An der Zwischenstelle $x = 1$ ist $f(1) = -\frac{8}{9} < 0$ negativ.

$$\Rightarrow A = -\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = -2\int_0^3 f(x)\,dx =$$

$$= -2\int_0^3 \frac{1}{9}(x^4 - x^2)\,dx = \left[\frac{1}{45}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 7\frac{1}{5}$$



b) (vgl. Buch S. 141, Fig. 2) Nullstellen von $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$ sind der Reihe nach $x_N = -2$, $x_N = 0$ und $x_N = 2$. Diese Nullstellen schließen 2 Teilflächen A_1 und A_2 ein, wobei $f(x)$ für die erste Teilfläche A_1 positiv ist (also $A_1 = +\int_{-2}^0 f(x)dx$) und $f(x)$ für die zweite Teilfläche A_2 negativ ist (also $A_2 = -\int_0^2 f(x)dx$). Wegen der Punktsymmetrie ($f(x)$ hat nur ungerade Exponenten) gilt $A_1 = A_2$, d.h. $A = 2\cdot A_1$.

$$\Rightarrow A = -2\int_0^2 (\frac{1}{2}x^3 - 2x)\,dx = -2\left[\frac{1}{8}x^4 - x^2\right]_0^2 = 4$$