| 11/2 — GK Mathematik | *Datum* |
|---|---|
| Mathematik-Übungsklausur — Lösungen | *27. Juni 2006* |

Name: ____________________________________________

Schreib bitte sauber und deutlich! Schreib auf jedes Blatt Deinen Namen. Gib bei jeder Berechnung die grundlegende Formel an! Bearbeitungszeit ist 90 min. Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

1. Eine ganzrationale Funktion der Ordnung 3 hat bei $x = 0$ eine Nullstelle und gleichzeitig Wendestelle und bei $H(-1|4)$ ein relatives Maximum. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Funktion. [12]

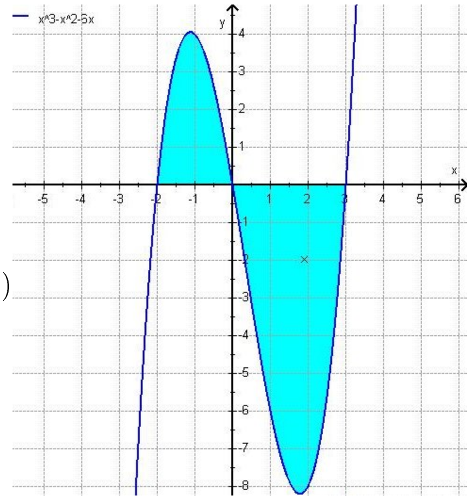
2. Berechne die Stammfunktionen $F(x)$ folgender Funktionen $f(x)$, wobei die Integrationskonstante $C = 0$ gewählt sein soll: [8]
   a) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x$ b) $f(x) = 7x^9 - 4x^7 + 3x^5 - 2x^3$
   c) $f(x) = 2x^{40} - 2x + 9$ d) $f(x) = -11x^{1000} + 4x^5 - 3x^3 - 22$

3. Berechne das Integral. [8]
   a) $\int_2^5 6x^2\,dx$ b) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

4. Berechne die Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der $x$-Achse einschließt. [18]

   a) $f(x) = -x^2 + 36$ (mach Dir selbst eine Skizze)

   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ (siehe Abbildung rechts ->)




5. Berechne die Fläche, die von den Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x$ eingeschlossen ist. [10]

| Aufgabe Nr.: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | **Summe** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl: | 12 | 8 | 8 | 18 | 10 | 56 |
| Davon erreicht: | | | | | | |

## Aufgabe 1

*Ausführliche Lösungshinweise:* Zunächst einmal schreibst Du die allgemeine Funktion 3. Grades auf: $f(x) \;=\; a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Dazu die ersten beiden Ableitungen (wegen der notw. Bedingungen für Extrema und Wendepunkte):

$f'(x) \;=\; 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ $\quad$ $f''(x) \;=\; 6a \cdot x + 2b$

Und nun versuchst Du aus den gegebenen Informationen die Bestimmungsgleichungen aufzustellen:

Nullstelle bei $x = 0 \Rightarrow f(0) \;=\; a \cdot 0^3 + b \cdot 0 \cdot {}^2 + c \cdot 0 + d \;=\; d \;=\; 0 \Rightarrow d = 0$

Wendestelle bei $x = 0 \Rightarrow f''(0) \;=\; 6a \cdot 0 + 2 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$

Punkt $H\ (\ -1 |\ 4\ ) \Rightarrow f(-1) \;=\; a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d \;=\; -a + b - c + d \;=\; 4$

Hochpunkt $H\ (\ -1 |\ 4\ ) \Rightarrow f'(-1) \;=\; 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c \;=\; 3a - 2b + c \;=\; 0$

Da $b = d = 0$ gilt ergibt sich das Gleichungssystem aus den beiden Gleichungen $I \quad -a - c = 4$ und $II \quad 3a + c = 0$. Addition dieser beiden Gleichungen führt zu $2a = 4 \Rightarrow a = 2$ und dies eingesetzt in Gleichung $I$ zu $c = -6$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2x^3 - 6x$.

## Aufgabe 2

a) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$

b) $F(x) = \frac{7}{10}x^{10} - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + C$

c) $F(x) = \frac{2}{41}x^{41} - x^2 + 9x + C$

d) $F(x) = -\frac{1}{91}x^{1001} + \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4 - 22x + C$

jeweils $C = 0$.

## Aufgabe 3

a) $\displaystyle\int_2^5 6x^2\, dx = \left[2x^3\right]_2^5 = 2 \cdot (125 - 8) = 234$

b) $\displaystyle\int_1^3 x^{-2}, dx = \left[-x^{-1}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

## Aufgabe 4

a) Nullstellen von $f(x) = -x^2 + 36$ sind $x_n = \pm 6 \Rightarrow A = \int_{-6}^{6} (-x^2 + 36)\, dx =$
$= [-\frac{1}{3}x^3 + 36x]_{-6}^{6} = 288$

b) Nullstellen von $f(x) = x^3 - x^2 - 6x = x \cdot (x^2 - x - 6)$ sind der Reihe nach $x = -2$, $x = 0$ und $x = 3$. Diese Nullstellen schließen 2 Teilflächen $A_1$ und $A_2$ ein, wobei $f(x)$ für die erste Teilfläche $A_1$ positiv ist (also $A_1 = +\int_{-2}^{0} f(x)dx$) und $f(x)$ für die zweite Teilfläche $A_2$ negativ ist (also $A_2 = -\int_0^3 f(x)dx$). Man darf jetzt nicht mehr von der kleinsten zur größten Nullstelle durchintegrieren, sondern muss eine Fallunterscheidung ($f(x)$ ober- bzw. unterhalb $x$-Achse) machen und für die Teilflächen zwischen jeweils 2 Nullstellen gesondert integrieren. Die Gesamtfläche $A$, die $f(x)$ mit der $x$-Achse einschließt, ist die Summe der Einzelflächen $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx =$$
$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{0}^{3} = 21\tfrac{1}{12}$$

## Aufgabe 5

$f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$. Dies sind die „Nullstellen" der Differenzfunktion $(g(x) - f(x)) \geq 0$. Im Intervall zwischen diesen „Schnittstellen" sind beide Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ positiv, und $g(x) \geq f(x)$.

$$\Rightarrow A = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = 1\tfrac{1}{3}.$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man durch eine kleine Skizze, in der man erkennt, dass die Schnittfläche die Differenz von einer Dreiecksfläche mit der Fläche unterhalb der Parabel ist. Beide Flächen können elementar durch Integrieren (bzw. Geometrie-Formel) berechnet werden, die Differenz ist dann $2 \cdot 4/2 - 8/3 = 1\frac{1}{3}$.
(siehe Abbildung rechts ->)