ZHH — Mathematik	*Datum*
Mathematik-Übungsklausur — Lösungen	*23. April 2007*

Name: ____

Schreib bitte sauber und deutlich! Schreib auf jedes Blatt Deinen Namen. Gib bei jeder Berechnung die grundlegende Formel an! Bearbeitungszeit ist 45 min. Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner und ausgewiesene Formelsammlung

1. Eine ganzrationale Funktion der Ordnung 3 hat bei $x = 0$ eine Nullstelle und gleichzeitig Wendestelle und bei $H(-1|4)$ ein relatives Maximum. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Funktion. [12]

2. Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2$. [12]

   A Berechnen Sie die Nullstellenpunkte N der Funktion $f(x)$!

   B Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x)$, d.h. x-Wert, y-Wert und die Entscheidung, ob ein relatives Maximum oder Minimum vorliegt!

   C Berechnen Sie die Wendepunkte W, d.h. x-Wert, y-Wert und die Überprüfung der hinreichenden Bedingung!

   D Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x)$ im Intervall von $x = -3$ bis $x = 3$ und kennzeichnen Sie auch Nullstellen, Extrema und Wendepunkte in Ihrer Skizze des Graphen (Maßstab: 1 cm entspricht auf der X-Achse und auf der Y-Achse 1 Einheit)!

Aufgabe Nr.:	1	2	**Summe**
Punktzahl:	12	12	24
Davon erreicht:			

Aufgabe 1

Ausführliche Lösungshinweise: Zunächst einmal schreibst Du die allgemeine Funktion 3. Grades auf: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Dazu die ersten beiden Ableitungen (wegen der notw. Bedingungen für Extrema und Wendepunkte):

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ $\qquad f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Und nun versuchst Du aus den gegebenen Informationen die Bestimmungsgleichungen aufzustellen:

Nullstelle bei $x = 0 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0 \cdot {}^2 + c \cdot 0 + d = d = 0 \Rightarrow d = 0$

Wendestelle bei $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 6a \cdot 0 + 2 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$

Punkt $H\ (-1|\ 4\ ) \Rightarrow f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = -a + b - c + d = 4$

Hochpunkt $H\ (-1|\ 4\ ) \Rightarrow f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 3a - 2b + c = 0$

Da $b = d = 0$ gilt ergibt sich das Gleichungssystem aus den beiden Gleichungen $I \quad -a - c = 4$ und $II \quad 3a + c = 0$. Addition dieser beiden Gleichungen führt zu $2a = 4 \Rightarrow a = 2$ und dies eingesetzt in Gleichung I zu $c = -6$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2x^3 - 6x$.

Aufgabe 2

A Nullstellenpunkte

Da es sich um eine biquadratische Funktion handelt, substituieren wir $z = x^2$ in der Gleichung

$$f = 0$$

Wir lösen also $\frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + 2 = 0$. Nach Multiplikation mit dem Kehrwert (4) ergibt sich: $z^2 - 6z + 8 = 0$können wir $p - q-$Formel benutzen ($p = -6$, $q = 8$): $z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \mp 1$, d.h. $z_1 = 2$ und $z_2 = 4$. Nach Rücksubstitution $x = \mp\sqrt{z}$ ergeben sich hier gleich 4 Nullstellen $x_{N1} = -2$, $x_{N2} = -\sqrt{2} \approx -1,41$, $x_{N3} = \sqrt{2} \approx 1,41$ und $x_{N4} = 2$. Da die Punkte gefragt sind, ist hier die Lösung $N_1(-2|0)$, $N_2(-\sqrt{2}|0)$, $N_3(\sqrt{2}|0)$ und $N_4(2|0)$.

B Extrema

Um Kandidaten für Extrema zu finden, lösen wir die Gleichung

$$f' = 0$$

Wir lösen also $x^3 - 3x = 0$. Hier lässt sich x ausklammern, was heisst, dass ein Extremum bei $x = 0$ liegen könnte. Die anderen beiden Extrema liegen dann als Lösung von $x^2 - 3 = 0$ vor, d.h. $x_{E1,3} = \mp\sqrt{3}$. Die Entscheidung, ob Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt fällt über das Einsetzen der Kandidaten in die 2. Ableitung $f''(x) = 3x^2 - 3$. Bei $x_{E1} = -\sqrt{3}$ liegt ein Tiefpunkt (☺) vor, da $f''(-\sqrt{3}) = 3 \cdot (3) - 3 = +6 > 0$ (☺). Bei $x_{E2} = 0$ liegt ein Hochpunkt (☹) vor, da $f''(0) = 3 \cdot (0) - 3 = -3 < 0$ (☹). Bei $x_{E3} = \sqrt{3}$ haben wir wieder einen Tiefpunkt (☺), da wiederum $f''(\sqrt{3}) = 3 \cdot (3) - 3 = 6 > 0$. Durch Einsetzen in die Ausgangsfunktion $f(x)$ finden wir die $y-$Koordinaten: $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2} \cdot (-\sqrt{3})^2 + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$, $f(0) = \frac{1}{4} \cdot (0)^4 - \frac{3}{2} \cdot (0)^2 + 2 = 2$ und wiederum $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2} \cdot (\sqrt{3})^2 + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$. Also sind die Extrema $T(-\sqrt{3}| - \frac{1}{4})$, $H(0|2)$ und $T(\sqrt{3}| - \frac{1}{4})$.

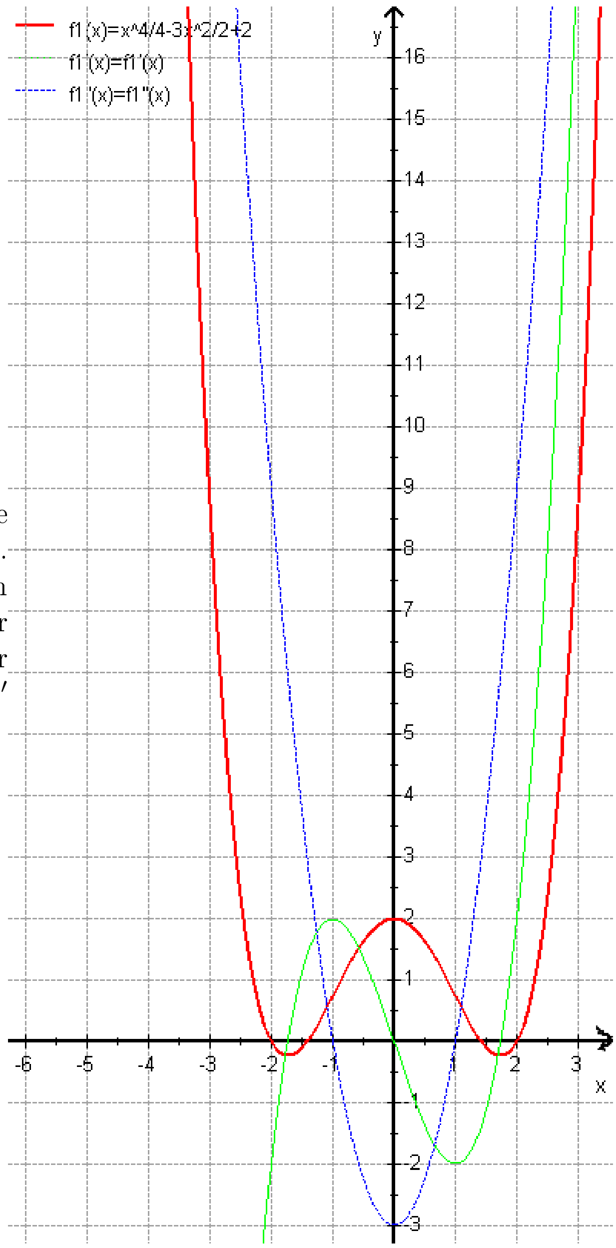
C Wendepunkte

Um Kandidaten für Wendepunkte zu finden, lösen wir die Gleichung

$$f'' = 0$$

Wir lösen also $3x^2 - 3 = 0$. Ähnlich oben ergibt dies $x_{W1,2} = \mp 1$. Dies eingesetzt in die 3. Ableitung beweißt, dass es sich um Wendestellen handelt: $f'''(\mp 1) \neq 0$. Durch Einsetzen in die Ausgangsfunktion $f(x)$ finden wir die $y-$Koordinaten:
$f(\mp 1) = \frac{1}{4} \cdot (\mp 1)^4 - \frac{3}{2} \cdot (\mp 1)^2 + 2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$.
Die beiden Wendepunkte sind also $W_1(-1|\frac{3}{4})$ und $W_2(1|\frac{3}{4})$.

D Skizze



Schließlich die Skizze der Funktion, in der die besonderen Punkte hier nicht eingezeichnet sind. Dafür sind aber 1. und 2. Ableitung zusätzlich mit eingezeichnet, und wegen der Nullstellen der Ableitungen, lassen sich somit alle Punkte klar erkennen (denn diese sind Nullstellen von f, f' und f'' ; siehe Abbildung rechts ->).