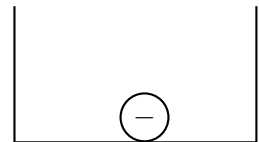


## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Linearer Potentialtopf</b>	<b>1</b>
1.1 Unendlich hohe Wände . . . . .	1
1.2 Nicht so hohe Wände . . . . .	2
1.3 Rechnung . . . . .	2

### 1 Linearer Potentialtopf

Der lineare Potentialtopf ist eindimensional, also linear. Passend zum Jubiläum der Deutschen Einheit und dem Fall der Mauer beschäftigen wir uns mit hohen Wänden, zwischen denen ein Teilchen, nennen wir es Elektron, eingesperrt ist. Das Bild erinnert dann an einen Topf (mit einer heißen Kartoffel):

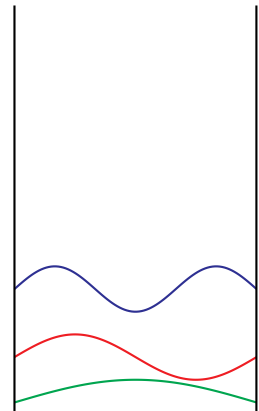


#### 1.1 Unendlich hohe Wände

Wenn das Potential  $V$  der Formel genügt:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

dann hat der Topf links bei  $x = 0$  und rechts bei  $x = a$  unendlich hohe Wände. Gleichzeitig ist damit klar, dass der Topf die Breite  $a$  hat. Da das Elektron wie jedes Ding nicht nur Teilchen sondern auch Welle ist, kann man sich das Elektron nun auch noch als stehende Welle vorstellen, wo an den Wänden nix schwingen kann, dort also Knoten (Nullstellen) der Wellenfunktion sein müssen:



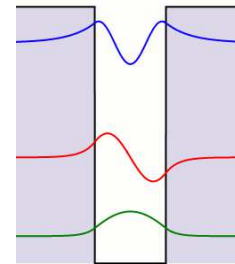
Das Bild zeigt drei Schwingungszustände des eingesperrten Elektrons: in grün den Grundzustand, der einen Schwingungsbauch nach oben enthält, in rot den ersten angeregten Zustand, der einer vollkommenen Sinus-Schwingung entspricht, und in blau den nächsthöheren Zustand. Mathematisch<sup>1</sup> passen in die Breite  $a$  mehrere halbe Wellenlängen:  $a = \frac{n \cdot \lambda}{2}$ . Umgeformt ist dies auch  $\lambda = \frac{2 \cdot a}{n}$ . Wir kennen dies ähnlich auch vom Bohrschen Atommodell (1. Bohrsche Postulat): Der Bahnradius ist nur dann stabil, wenn der Umfang ein ganzzahliges Vielfaches der de-Broglie-Wellenlänge des Elektrons beträgt, weil sich das Elektron sonst durch Interferenz selbst vernichten würde. Beim Topf reicht ein ganzzahliges Vielfaches der halben de-Broglie-Wellenlänge des Elektrons. Die de-Broglie-Wellenlänge ist immer  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Hierbei ist  $p = m \cdot v$  der Impuls des Teilchens, klassisch das Produkt aus Masse mal Geschwindigkeit. Umgeformt ist  $p = \frac{h}{\lambda}$ . Wenn im Topf das Potential null ist, so hat das Teilchen nur kinetische Energie  $W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$ . Setzen wir in diese Formel der kinetischen Energie ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{p^2}{2m} && | p \text{ einsetzen von de-Broglie} \\ &= \frac{h^2}{2m\lambda^2} && | \lambda \text{ einsetzen von stehender Welle} \\ &= \frac{h^2}{2m(2a/n)^2} && | \text{zusammen fassen} \\ &= \frac{h^2 \cdot n^2}{8m \cdot a^2} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Die Sinusschwingungen hätten die Form  $\Psi(x) = \Psi_0 \sin(\frac{n \cdot \pi}{a} x)$ .

## 1.2 Nicht so hohe Wände

Anschaulich kann beim Erhitzen von Mais im Topf das eine oder andere gepuffte Maiskorn aus dem Topf heraus hüpfen. Ähnlich ergibt sich für ein im Topf gebundenes Elektron immer eine Wahrscheinlichkeit dafür aus dem Topf zu gelangen. Dies ist im Widerspruch zur klassischen Physik, wenn das Elektron nicht so hohe kinetische Energie  $W_k$  hat um das Potential  $V$  zu überwinden. Klassisch wie quantentheoretisch kann das Elektron nicht aus dem Topf, wenn die Potentialwände unendlich hoch sind.



Aber nach der Quantenmechanik kann das Elektron auch mit einer kleinen Energie  $W_k$  die hohe Potentialbarriere durchbrechen. Dies nennt man *Tunneleffekt*, als ob das Elektron sich mit einer Schaufel einen Tunnel aus dem Gefängnis buddelt. Im Bild sieht man die an die endlich hohen Wände angepassten Wellenfunktionen. Sie reichen nun exponentiell abfallend in die Wände hinein. D.h. es gibt nun eine kleine Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in der Wand anzutreffen, was klassisch unmöglich wäre.

Der Tunneleffekt spielt praktisch bei vielen Geräten eine wichtige Rolle, optoelektronische Halbleiterbauelemente (z.B. in USB-Sticks) und auch z.B. das bekannte Rastertunnelmikroskop basieren darauf. Der Tunneleffekt macht überhaupt erst Leben möglich, denn dank ihm kann die Sonne Energie erzeugen und unseren Planeten wärmen. Druck und Temperatur im Innern der Sonne und anderen Sternen würden alleine nicht dafür ausreichen, dass Kerne zusammen schmelzen (Kernfusion). Durch den Tunneleffekt wird das Potential jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit quantenmechanisch überwunden.

## 1.3 Rechnung

Wie gesagt sind die Modelle vom linearen Potentialtopf und Bohrschen Atommodell ähnlich. In beiden Modellen hängt die Energie vom Quadrat der Quantenzahl  $n$  ab. In einer Abi-Aufgabe werden beide Modelle verwurstet: „Ein Wasserstoffatom sendet beim Übergang vom zweiten in den ersten Energiezustand ein Photon der Wellenlänge  $\lambda = 121,6$  nm aus. Berechnen Sie die Breite  $a$  des linearen Potentialtopfes, die sich daraus ergibt.“

Eigentlich ist Wasserstoff trotz gewisser Ähnlichkeiten gar nicht gleich dem Potentialtopf. Also was soll das? Nun können wir das Bohrsche Atommodell vergessen und so tun als hätten die grüne und die rote Elektronenwelle im Topf etwas mit dieser Aufgabe zu tun. Wenn demnach die rote Welle runterplumst und zur grünen Welle wird, gibt sie ihre Energie (ähnlich dem Elektron im Bohrschen Modell) als Photon mit einer Wellenlänge  $\lambda$  und zugehöriger Energiedifferenz  $\Delta W$  ab:

$$h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{h^2 \cdot 2^2}{8m \cdot a^2} - \frac{h^2 \cdot 1^2}{8m \cdot a^2} = \frac{h^2}{8m \cdot a^2} \cdot (4 - 1) = \frac{h^2 \cdot 3}{8m \cdot a^2}$$

Hier stellt man nach  $a$  um<sup>2</sup> und setzt alles ein. Der lineare Potentialtopf hat also eine Breite von  $a \approx 3,3 \cdot 10^{-10}$  m = 0,33 nm.

Die einzusetzenden Werte sind (neben  $\lambda$ ):

Planck-Konstante  $h = 6,62607004 \cdot 10^{-34}$  J s  $\approx 6,6 \cdot 10^{-34}$  Js

Lichtgeschwindigkeit  $c = 299792458$  m/s  $\approx 3 \cdot 10^8$  m/s

Elektronenmasse  $m = m_e = 9,10938356 \cdot 10^{-31}$  kg  $\approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

<sup>2</sup>Ihr habt sicher auch  $a = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}} \approx 3,3262553398347566 \cdot 10^{-10}$  m erhalten.