

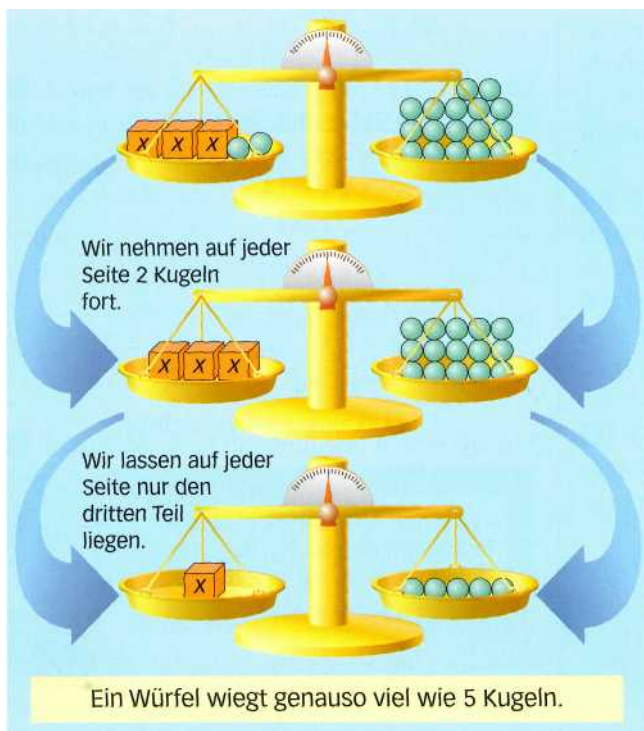
Lösen von Gleichungen durch Umformen

Mit einer Waage zeigen wir, wie man Gleichungen **umformen** kann und so durch *Rechnen* Lösungen findet. Dazu wählen wir die Gleichung $3x + 2 = 17$.

Die Zahlen 2 und 17 stellen wir uns als 2 und 17 *Kugeln* vor.

Für die unbekannte Zahl x setzen wir *einen Würfel*, für $3x$ *drei* Würfel.

Die Kugeln und Würfel befinden sich in der linken oder rechten Waagschale, so wie die Zahlen und Variablen in der Gleichung links oder rechts vom Gleichheitszeichen stehen.



Hier halten wir den Rechenweg fest:

$$3x + 2 = 17$$

Wir subtrahieren 2 auf beiden Seiten

$$3x + 2 - 2 = 17 - 2$$

$$3x = 15$$

Wir dividieren auf beiden Seiten durch 3

$$3x : 3 = 15 : 3$$

$$x = 5$$

Die Gleichung $3x + 2 = 17$ hat die Lösung $x = 5$.

Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf **beiden Seiten** die gleiche Operation durchgeführt wird:

- Auf beiden Seiten dasselbe *hinzulegen*,
- auf beiden Seiten dasselbe *wegnehmen*,
- auf beiden Seiten das *Doppelte*, das *Dreifache* ... *hinlegen*,
- auf beiden Seiten die *Hälfte*, ein *Drittel* ... *hinlegen*.

In der **Gleichung** bleibt das Gleichheitszeichen erhalten, wenn wir auf **beiden Seiten** dieselben Rechenschritte ausführen:

- Auf beiden Seiten dasselbe *addieren*,
- auf beiden Seiten dasselbe *subtrahieren*,
- auf beiden Seiten mit derselben Zahl (ungleich 0) *multiplizieren*,
- auf beiden Seiten durch dieselbe Zahl (ungleich 0) *dividieren*.

Eine Gleichung lösen wir, indem wir

- wenn nötig, erst die Rechenausdrücke auf beiden Seiten **zusammenfassen**,
- die Gleichung dann schrittweise so umformen, dass die **gesuchte Variable allein auf einer Seite** steht

Übung: Welche Gleichung wurde an der Waage gelöst? **Beschreiben Sie die Lösungsschritte!**



Wir merken uns:

Wir lösen eine Gleichung, indem wir **Klammern auflösen**, **Terme zusammenfassen** und auf **beiden Seiten der Gleichung**

- dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren,
- mit derselben Zahl (außer Null) multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (außer Null) dividieren, bis die Variable auf einer Seite der Gleichung allein steht.

Gleichungen lassen sich oft nach einem Ablaufplan lösen:

Beispiel

$$\begin{aligned} 9x + 5 \cdot (2 - x) &= 3x - (x - 15) && | \text{Klammern auflösen} \\ 9x + 10 - 5x &= 3x - x + 15 && | \text{zusammenfassen} \\ 4x + 10 &= 2x + 15 && | -2x \\ 2x + 10 &= 15 && | -10 \\ 2x &= 5 && | :2 \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

Ablaufplan



Beim **Ausmultiplizieren** der Klammern („**auflösen**“) müssen wir die Vorzeichen beachten:

Steht vor der Klammer eine positive Zahl, bleiben die Vorzeichen in der Klammer erhalten,
z.B. $+4(2x - 3) = 8x - 12$.

Steht vor der Klammer eine negative Zahl, drehen sich die Vorzeichen in der Klammer um, denn
„Minus mal Minus ergibt Plus“,
z.B. $-4(2x - 3) = -8x + 12$.

Beim **Teilen** durch den x-Vorfaktor müssen wir beachten, dass man beim Teilen durch einen **Bruch** mit dessen Kehrwert multipliziert:

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= \frac{x}{2} + 1 && | -\frac{x}{2} \\ 3x - \frac{1}{2}x + 5 &= 1 && | \text{auf gleichen Nenner bringen und zusammenfassen} \\ \frac{5}{2}x + 5 &= 1 && | -5; \text{damit sind die Seiten geordnet} \\ \frac{5}{2}x &= -4 && | \cdot \frac{2}{5} \\ x &= -4 \cdot \frac{2}{5} && | \text{ausrechnen und unterstreichen} \\ x &= \underline{\underline{-\frac{8}{5}}} = \underline{\underline{-1\frac{3}{5}}} \end{aligned}$$