Extremwertprobleme

Aufgabe 1
Fritz möchte seinem Kaninchen Mümmelmann ein Auslauf im Freien bauen. Im Keller findet er noch eine Rolle Kaninchendraht. Da er sein Kaninchen liebt, sollte der Auslauf möglichst groß sein. Er mißt die Rolle Kaninchendraht ab, es sind 5 Meter. Da er nur vier Pfosten findet, möchte er daraus ein rechteckiges Gehege bauen. Wie wird das Gehege am größten?

a) Skizziere die Aufgabe.
b) Stelle eine Vermutung auf, welches Rechteck das flächengrößte sein wird.
c) Rechne nach, ob Deine Vermutung stimmt. Wie groß ist die größte Fläche?

Tipps:
Der Umfang ist als Nebenbedingung gegeben als die Summe aller vier Seiten. Bei einem Rechteck mit Seiten a und b ist die Fläche das Produkt: a mal b.

Aufgabe 2
Fritz möchte zwei der vier Pfosten für ein Baumhaus verwenden und überlegt, ob er für den Kaninchenauslauf mit nur zwei Pfosten auskommen kann. Er kommt auf die Idee, dass er eine Seite des Rechtecks durch die Hauswand begrenzen kann und den Zaun an der sechs Meter breiten Hauswand befestigen kann. So benötigt er nur zwei Pfosten.

a) Skizziere die Aufgabe.
b) Stelle eine Vermutung auf, ob der Auslauf größer oder kleiner wird als in Teil 1.
c) Finde heraus, wo er die Pfosten hinstellen muß, damit Mümmelmann am meisten Platz hat. Wie groß ist die größte Fläche?

Tipps:
Siehe **Aufgabe 1.** Jetzt braucht er allerdings den Draht nur noch für drei der vier Seiten.

Aufgabe 3
Der Maschinenbauer Meier hat ein Bauteil patentieren lassen und daher ein Monopol darauf. Die Grundnachfrage (=Sättigungsmenge, d. h. die Menge, über die hinaus selbst bei kostenloser Abgabe des Produktes die nachgefragte Menge nicht hinausgeht) nach diesem Produkt beträgt 100 Mengeneinheiten (ME) pro Tag. Diese Grundnachfrage wird durch den Preis gedrückt, d.h. es gibt eine Verringerung der nachgefragten Menge um 1 ME je 1 Geldeinheit (GE) oder andersherum: soll die nachgefragte Menge um 1 ME steigen, muss der Preis um 1 GE sinken.
Die Herstellungskosten betragen 20 GE pro ME. Meier möchte nun bestimmen, bei welcher Menge er den maximal möglichen Gewinn durch den Verkauf der Ware erzielt, zu welchem Preis er dabei die Ware anbieten muss und wie hoch dieser maximale Gewinn ist.

a) Skizziere die Aufgabe!
b) Stelle eine Vermutung auf, bei welchem Preis der Gewinn maximal ist.
c) Rechne nach, ob Deine Vermutung stimmt und berechne den maximalen Gewinn!

TIPPS:
Der Preis ist eine Funktion der nachgefragten Menge x, also $p(x)$.
Der Gewinn $G(x)$ ist die Differenz aus Erlösen und Kosten, also $G(x)=E(x)-K(x)$.
Der Erlös $E(x)$ ist das Produkt aus Menge und Preis.

Allgemeine Tipps zum Herangehen

0) *Überlege,* was eigentlich gesucht ist - welche einzelnen Faktoren spielen eine Rolle, welche geometrischen Formen oder Zusammenhänge brauche ich? Mach evtl. eine Zeichnung zur Veranschaulichung. Was ist das Ziel dieser Überlegungen?

1a) Führe Beispielrechnungen durch und lege eine Tabelle an.

1b) Mach eine Skizze des gesuchten Funktionsgraphen!

2) Stelle die Funktionsgleichung auf! Ziel ist, für diese einen Extremwert zu finden.

3) Weil man für die Extremwertbestimmung die Ableitung braucht: Ableitungsfunktion bilden!

4) Im Hochpunkt oder Tiefpunkt eines Funktionsgraphen ist die Steigung 0, also setze die Ableitungsfunktion gleich Null, ($f'(x) = 0$)

5) Durch Auflösen der Gleichung nach x bestimme den oder die "Kandidaten" für die Extremwertstellen. Handelt es sich um für das Problem sinnvolle Stellen?

6) Überprüfe, ob tatsächlich ein Hochpunkt oder Tiefpunkt vorliegt (z.B. mit dem Vorzeichenwechselkriterium oder durch Einsetzen in die 2. Ableitung).

7) Überprüfung auf Randextrema (ob vorhanden bzw. wichtig).

8) Interpretation des Ergebnisses (Antwortsatz! – back to reality)