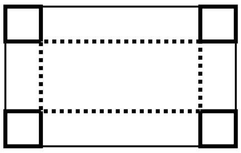
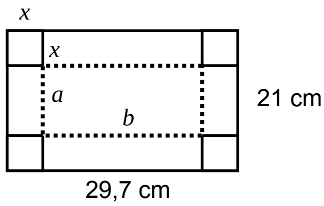
Allgemeines Vorgehen bei **Extremwertproblemen**



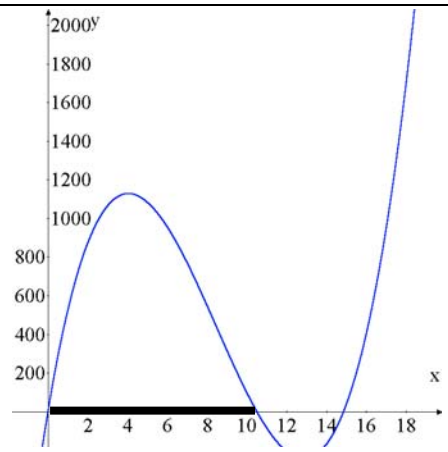
Skizze 1



	Allgemeines Vorgehen	Beispiel – Kasten
A) Modellbildung	1. ***Problemstellung*** beschreiben (wenn möglich mit Skizze).	Aus einem DinA4-Blatt soll eine Kiste gebaut werden indem an den Ecken kleine Quadrate abgeschnitten und die so entstehenden Seitenflächen hoch geklappt werden. Das Volumen soll möglichst groß werden. Siehe Skizze 1 oben.
	2. ***Variablen*** festlegen.	Das Papier wird abgemessen und die Grundseiten der Kiste werden mit a und b bezeichnet. Die Höhe der Kiste wird mit x bezeichnet. Siehe Skizze 2 neben 1.
	3. ***Zielfunktion*** aufstellen (an dieser Stelle ist die Zielfunktion meist noch abhängig von mehreren Variablen).	Das Volumen einer Kiste berechnet sich mit der Formel $V=a\cdot b\cdot c$, wobei a,b und c die Kanten sind. In unserem Fall sind die Kanten mit a, b und x bezeichnet, also berechnet sich das Volumen V, was maximal werden soll (Ziel), durch $V = a\cdot b\cdot x$
	4. ***Nebenbedingungen*** aufstellen (in welchen Intervallen dürfen die Werte der Variablen liegen, so dass die Aufgabenstellung sinnvoll ist).	Die Nebenbedingungen für die Grundseiten sind, dass sie jeweils nicht oder kleiner als der Papierrand sein dürfen, das heißt: $0 \le a \le 21$ und $0 \le b \le 29{,}7$. Die Nebenbedingung für die Höhe ist, dass sie zwei Mal in den kleineren Papierrand hineinpassen muss, also $0 \le x \le 21/2$, die Seitenlängen sind jeweils Breite = 21 = $a + 2x$ und längster Papierrand = 29,7 = $b + 2x$.
	5. ***Reduktion auf eine Variable*** Die Zielfunktion (aus 3.) als Funktion einer Variablen notieren.	Wir drücken dann die Variablen a und b mit Hilfe von x aus $a = 21 - 2x$, $b = 29{,}7 - 2x$ und setzen dies ein für die Zielfunktion: $V(x) = a\cdot b\cdot x = (21-2x)(29{,}7-2x)x = 4x^3 - 101{,}4x^2 + 623{,}7x$
	6. Aus den Nebenbedingungen (aus 4.) das **interessierende Intervall** bestimmen.	Die Zielfunktion $V(x)$ interessiert nur für x-Werte zwischen 0 und 21/2, also $0 \le x \le 21/2$, d.h. $x \in \boldsymbol{I}$ = [0; 10,5]
	7. ***Reformulierung der Problemstellung*** aus 1. als mathematisierte Aufgabe.	Wir suchen dasjenige x, für das die Zielfunktion $V(x)$ in dem Intervall $\boldsymbol{I}$ am größten wird, d.h. wir suchen lokale Maxima oder Randmaxima.

	Allgemeines Vorgehen	Beispiel – Kasten
B) Arbeiten am mathematischen Modell	8. Eventuell den ***Funktionsgraphen*** der Zielfunktion zeichnen.	Siehe Skizze 3 unten.
	9. ***Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:*** Erste Ableitung bilden und deren Nullstelle(n) bestimmen.	$f'(x) = 12x^2 - 202{,}8x + 623{,}7$, die Bedingung $f'(x_E)=0$ liefert die Nullstellen $x_1 = \frac{202{,}8+\sqrt{202{,}8^2-29937{,}6}}{24} \approx 12{,}86$ und $x_2 = \frac{202{,}8-\sqrt{202{,}8^2-29937{,}6}}{24} \approx 4{,}04$
	10. **Werte im interessierenden Intervall?** Prüfen, ob die Werte im interessierenden Intervall liegen.	Offensichtlich ist nur x_2 eine vernünftige Lösung (liegt in dem Intervall aus 6.: $x_2 \in \boldsymbol{I}$).
	11. **Extremwerte überprüfen** Zweite Ableitung bilden und die potentiellen Extremwerte mit Hilfe der zweiten Ableitung prüfen (oder eine andere hinreichende Begründung für relative Extrema anführen).	Die zweite Ableitung lautet: $f''(x) = 24x - 202{,}8$ hier x_2 eingesetzt liefert: $f''(x_2) \approx -105{,}78 < 0$ Die Funktion hat also hier einen Hochpunkt (☹, vergleiche mit der Zeichnung, s. Skizze 3 unten).
	12. Zugehörige Werte der **anderen Variablen** und der **Zielfunktion** berechnen.	$V(x_2) \approx 1128{,}5$, $a = 21 - 2x_2 \approx 12{,}92$, $b = 29{,}7 - 2x_2 \approx 21{,}62$
	13. Mögliche **Randextrema** überprüfen.	Am Rand des interessierenden Intervalls ist die Volumenfunktion nicht größer als an dem Extremwert, denn dort sind gerade die Nullstellen der Funktion. $f(0) = 0$ und $f(10{,}5) = 0$, es handelt sich hier um **Randminima**!

	Allgemeines Vorgehen	Beispiel - Kastenbau
C) Reinterpretation	14. Gesamtantwort auf die Aufgabenstellung formulieren, Ergebnis deuten.	Den volumengrößten Kasten erhält man, in dem man die Seiten, x≈4,04cm, a≈12,92cm und b≈21,62cm wählt. Das Volumen ist dann ca. 1128,5 cm³
	15. Eventuell das entwickelte Modell modifizieren (korrigieren oder erweitern).	Man könnte zum Beispiel beliebige Papiergrößen zulassen und das Problem allgemeiner formulieren.



Skizze 3