1 Dorn Bader — Aufgaben zum Compton-Effekt

Zunächst sollte man sich wichtige physikalische Konstanten heraus suchen und ggf. als Konstanten in den TR speichern:
Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Elementarladung $e = 1{,}6021766209 \cdot 10^{-19}$ C
Plancksches Wirkungsquantum $h = 6{,}626\,070\,041 \cdot 10^{-34}\,\text{J s} = 4{,}135\,667\,662 \cdot 10^{-15}\,\text{eV s}$
Elektronenmasse $m = 9{,}109\,383\,56 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$
Compton-Wellenlänge $\lambda_\text{C} = \frac{h}{m\,c} = 2{,}4263102367 \cdot 10^{-12}$ m

1.1 Aufgabe A1

a) $U = 30$ kV, wie groß sind W_k, λ, p ?
Beschäftigen wir uns zunächst einmal mit den **Elektronen**. Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) erhält das Elektron über die Beschleunigungsspannung U:
$W_k = e \cdot U = 1{,}6021766209 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^4\ J = 4{,}8065298627 \cdot 10^{-15}$ J ist die gesuchte kinetische Energie der schnellsten Elektronen und und aufgrund der Energieerhaltung auch die Energie der härtesten hierbei entstehenden Röntgenstrahlung.
$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}8065298627 \cdot 10^{-15}}{9{,}109\ 383\ 56 \cdot 10^{-31}}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}027274069675245 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Geschwindigkeit der schnellsten Elektronen (ein Drittel der Lichtgeschwindigkeit!) um den gesuchten Impuls der Elektronen $p_e = m \cdot v$ zu berechnen
$p_e = m \cdot v = 9{,}109\ 383\ 56 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}027274069675245 \cdot 10^8\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}} = 9{,}357833521913974 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ ist der gesuchte Impuls der schnellsten Elektronen.
$\lambda_B = \frac{h}{p_e} = \frac{6{,}626\ 070\ 041 \cdot 10^{-34}}{9{,}357833521913974 \cdot 10^{-23}}$ m ist die zugehörige de-Broglie-Wellenlänge dieser Elektronen, also $\lambda = 7{,}080773584487489 \cdot 10^{-12}$ m, also rund 7 pm.
Nun noch einmal zu den Lichtquanten **(Photonen)**: Die entstehende Röntgenstrahlung besteht aus energiereichen Photonen der maximalen Energie $W = W_k = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$, hieraus ergibt sich die Wellenlänge der Photonen zu $\lambda = \frac{h \cdot c}{W_k} = \frac{6{,}626\ 070\ 041 \cdot 10^{-34} \cdot 299\ 792\ 458 \cdot 10^8}{4{,}8065298627 \cdot 10^{-15}}\,\text{m} = 4{,}132806580246009 \cdot 10^{-11}$ m, also hat die energiereichste Strahlung eine Wellenlänge von rund 41 pm. Photonen haben zwar keine Masse, aber einen Impuls $p = \frac{W}{c} = \frac{h}{\lambda} \approx 1{,}603285784694424 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$.

b) Wie groß ist die Wellenlängenzunahme $\Delta\lambda$ der an freien Elektronen gestreuten Quanten (Photonen)?
$\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\varphi)$ lautet die notwendige Formel zur Berechnung, die von den Streuwinkeln φ (laut Formelsammlung, im Buch auch β genannt) abhängt. $\lambda_C = 2{,}4263102367 \cdot 10^{-12}$ m ist der Wert der Konstante (Compton-Wellenlänge des Elektrons, rund 2,4 pm).
Setzen wir in diese Formel die gegebenen Werte für φ (bzw. β) ein erhalten wir für die Wellenlängenzunahme $\Delta\lambda$, für die gestreute Wellenlänge $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, die Energie $W = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda'}$ und den Impuls $p = \frac{W}{c}$ der gestreuten Quanten (Photonen) die folgenden Werte[1]:

Winkel φ in Grad:	0	30	90	180
$\Delta\lambda$ in pm:	0	0,325	2,43	4,85
λ' in pm:	41,33	41,65	43,75	46,18
W in fJ:	4,81	4,77	4,54	4,30
W in keV:	30	29,77	28,34	26,85
p in $10^{-23}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$	1,60	1,59	1,51	1,43

[1] Rundungsfehler schlagen hier leicht zu und führen zu physikalischen Inkonsistenzen, so kann die Photonenenergie nicht größer als die kinetische Energie der Elektronen werden.

An den winzigen Impulsen p der Röntgenstrahlung ($\sim 10^{-23}$) sieht man, dass man mit Licht keine Kugel auf dem Billardtisch anstoßen kann, geschweige denn, einen Lungenpatienten umschubsen. Trotzdem ist die Strahlung relativ energiereich, ionisierend und deswegen gefährlich.

c) Welche Energie hat jeweils das freie gestreute Elektron?
Da wir Energieerhaltung (und Impulserhaltung) haben, nimmt das gestreute Elektron jeweils die Energiedifferenz ΔW aus einfallender Energie und gestreuter Photonenenergie mit, die stark gerundeten Werte sind:

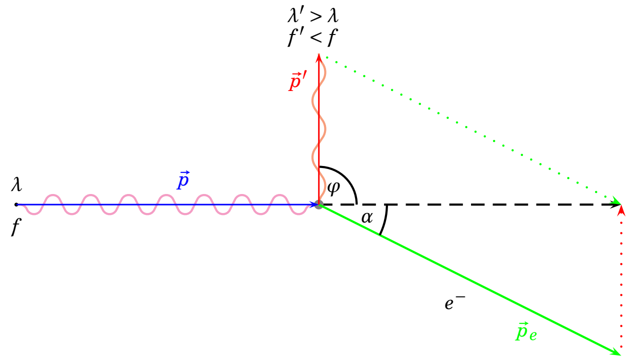
Winkel φ in Grad:	0	30	90	180
ΔW in fJ:	0	0,038	0,267	0,505
ΔW in keV:	0	0,234	1,664	3,152

1.2 Aufgabe A2

a) Welche Mindestspannung liefert für die Röntgenstrahlung λ_C? Was sind W_k, und p_e?
Die Rechnung ist ähnlich zu A1 (siehe 1.1): $W_k = e \cdot U = \frac{h \cdot c}{\lambda_C} \Rightarrow U = \frac{W_k}{e} = \frac{m \cdot c^2}{e} = 510998{,}9462367162$ V. Die Beschleunigungsspannung U entspricht der Ruhemasse des Elektrons geteilt durch die Elementarladung. Die Bewegungsenergie ist dann gleich der Ruhemasse des Elektron von rund 511 keV. Der Impuls würde sich klassisch als $p_e = m \cdot v$ berechnen, mit $v = \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{m}} = \sqrt{2} \cdot c =$ 423970560 m/s zu $p_e = 3{,}862110449194976 \cdot 10^{-22}$ kg m/s. Allerdings hätte das Elektron nach dieser Rechnung eine Geschwindigkeit, die 41% größer als die Lichtgeschwindigekeit c ist, was nach der Relativitätstheorie unmöglich ist. Aber bislang hat keiner gesagt, dass wir relativistisch rechnen müssen.

b) Die Photonen mit λ_C streuen an den Elektronen mit $\varphi = 90^o$. Was sind W', λ' und ΔW?
Nach Compton haben die gestreuten Photonen die doppelte Wellenlänge, da $\cos(90^o) = 0$ und somit $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\varphi) = \lambda_C$ und $\lambda' = \Delta\lambda + \lambda_C = 2 \cdot \lambda_C = 4{,}852620472917593$ pm (s.a. Dorn/Bader S. 247 1.d)). Wegen der doppelten Wellenlänge ist die zugehörigen Energie des Photons nur noch halb so groß, also statt rund 511 keV, nur noch rund 255,5 keV. Wegen Energieerhaltung ist die fehlende Hälfte auf das gestoßene Elektron übergegangen $\Delta W = W' = W_k/2$.

c) Bestimme Impulsvektoren des streuenden Photons und gestoßenen Elektrons:
Da das gestreute Photon die doppelte Wellenlänge (und halbe Energie s.b)) hat, ist auch der Impuls $p' = \frac{h}{\lambda \text{Ä}}$ halbiert (s.a. Dorn/Bader S. 246 B3). Wenn man dies mit dem Geodreieck sauber konstruiert kommt man auf folgende Zeichnung, die auch den Impulsvektor $\vec{p}_e$ enthält. Der blaue Pfeil ist der Impuls der harten Röntgenstrahlung. Wegen Impulserhaltung ist der resultierende Vektor (gestrichelt) aus Streu- (rot) und Elektronenimpuls (grün) gleich lang wie der blaue Pfeil. Rechtwinklig (90^o) zeichnen wir den Streuvektor (rot) nach oben und wissen, dass seine Länge wegen doppelter Wellenlänge („rotverschoben“) nur noch halb so lang ist wie der blaue Pfeil. Von der Pfeilspitze des roten Pfeils zeichnen wir dann runter zur Pfeilspitze des resultierenden Vektors (gestrichelt) und erhalten (gepunktet) einen Repräsentanten des Elektronenimpulses. Diesen schieben wir parallel zum Ort des Stoßes herunter, so dass sich der grüne Pfeil damit ergibt. Seine Länge können wir maßstäblich mit dem Geodreieck ablesen. Ich bevorzuge natürlich eine rechnerische Lösung: Wir erkennen aus gestricheltem Pfeil (Länge p) und gepunktetem Pfeil unten (Länge $p' = p/2$) ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse (grüner Pfeil), dessen Länge der gesuchte Elektronen-Impuls p_e ist. Nach Pythagoras gilt $p_e^2 = p^2 + p'^2 = p^2 + (\frac{p}{2})^2 = p^2 \cdot (\frac{4}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}p^2 \Rightarrow p_e = \frac{\sqrt{5}}{2}p = 3{,}053266398648034 \cdot 10^{-22}$ kg m/s. Der zugehörige Winkel α des Elektronen-Impulses p_e lässt sich mit dem Geodreieck zu etwa 27^oablesen oder als $\alpha = \arctan(\frac{p'}{p}) = \arctan(0{,}5) = 26{,}565051177077990^o$ berechnen.



1.3 Aufgabe A3

Quanten mit $\lambda = \lambda_C/2$ treffen „freie Elektronen".
a) Wie groß ist die Wellenlängenänderung in % unter $\varphi = 0^o, 45^o, 90^o$ und 180^o? Wie groß ist das maximal mögliche $\Delta\lambda$? Unter welchem Winkel φ tritt es auf?
b) Wie groß wäre die Comptonverschiebung $\Delta\lambda$ unter 90^o bei sichtbarem Licht ($\lambda = 600$ nm) in %?

a)

Winkel φ in Grad	0	45	90	180
$\Delta\lambda$ in pm	0	0,7	2,43	4,86
Prozente bezogen auf $\lambda_C/2$	0%	58,3%	202,5%	405%

Aus der Tabelle sieht man das maximal mögliche $\Delta\lambda = 4{,}86$ pm unter dem Winkel $\varphi = 180^o$.

b) Bei sichtbarem Licht sieht man keine Comptonverschiebung, denn $\lambda = 600$ nm $\approx 250000 \cdot \lambda_C$. $\Delta\lambda$ errechnet sich folglich zu $\Delta\lambda \approx 0{,}0004\%$. Tatsächlich sind Elektronen gegenüber dem Impuls von sichtbaren Licht zu fest gebunden um heraus gestoßen zu werden.

1.4 Aufgabe A4

Welche Masse haben Quanten (Photonen) mit der Wellenlänge $\lambda = \lambda_C$? Welchen Energieverlust erleiden sie bei $\varphi = 180$ Grad (direkter, gerader Stoß)?
Einsetzen in die bereits bekannte Formel $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\varphi)$ ergibt den Wert $\Delta\lambda = 2\lambda_C = 4{,}8526 \cdot 10^{-12}$ m, um den sich die Wellenlänge des zurückprallenden Photons erhöht. Statt $\lambda = \lambda_C = 2{,}4263 \cdot 10^{-12}$ m, hat es nun die größere Wellenlänge $\lambda' = \lambda_C + \Delta\lambda = 3\Delta\lambda = 7{,}2789 \cdot 10^{-12}$ m. Die neue Energie ist $W' = \frac{h \cdot c}{\lambda'} = 2{,}7290 \cdot 10^{-14}$ J. Vor dem Stoß hatte das Photon wesentlich mehr Energie, nämlich $W = \frac{h \cdot c}{\lambda} = 8{,}1871 \cdot 10^{-14}$ J.
Der gesuchte Energieverlust ist also $\Delta W = W - W' = \frac{2}{3} \cdot W = 5{,}4581 \cdot 10^{-14}$ J, genau das Doppelte der Photonenenergie nach dem Stoß.
Nach Einsteins berühmter Gleichung $W = mc^2$ (auch bekannt als $E = mc^2$) entspricht der Energie W der Photonen eine Masse $m = \frac{W}{c^2} = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg, d.h. das dynamische Massenäquivalent der Energie von Photonen mit der Wellenlänge $\lambda = \lambda_C$ entspricht genau einer Elektronenmasse (s.a. A2). Klassisch stoßen hier also „gleich schwere" Kugeln aufeinander. Allerdings würde klassisch beim zentralen Stoß zweier gleich schwerer Kugeln die stoßende Kugel liegen bleiben und vollkommen seinen Impuls an die vor dem Stoß ruhende Kugel weiter geben, die dann mit der Geschwindigkeit der stoßenden Kugel weiter rollen würde, der Energieverlust wäre klassisch total. Photonen kennen nun nur die Lichtgeschwindigkeit c, ruhende Photonen gibt es nicht. Also prallen die zentral stoßenden Photonen vom „gleich schweren" Elektron

ab und fliegen mit Lichtgeschwindigkeit zurück, wo sie hergekommen sind. Relativistisch ist es unmöglich, dass die Elektronen mit Lichtgeschwindigkeit weiter fliegen, doch ist ihre Geschwindigkeit hoch und kommt der Lichtgeschwindigkeit so nahe, dass man eigentlich bereits relativistisch rechnen müsste (was man im Grundkurs aber nicht tut). In Aufgabe A1 (1.1) sind leichtere Photonen von den schwereren ruhenden Elektronen zurück geprallt, ähnlich wie wir es auch klassisch erwarten würden, aber dass gleich schwere Photonen von den gleich schweren ruhenden Elektronen zurück prallen, lässt sich mit klassischen Kugeln bzw. Teilchen nicht erklären. (Als Billard-Liebhaber kennt man allerdings den sogenannten „Gegeneffet“. Hierbei wird die weiße Kugel horizontal mittig, aber vertikal unten getroffen um sie nach der Kollision mit einer anderen Kugel vom Treffpunkt aus zurückrollen zu lassen („Zugball“). Die weiße Kugel bekommt dadurch einen Drehimpuls, der entgegengesetzt der Laufrichtung der Kugel wirkt, sie dabei kontinuierlich abbremst und wie gesagt ggf. zurück laufen lässt. — Leider lässt sich das Billardmodell aber nicht auf Photonen und Elektronen übertragen! Wie sollte man sich das Anschneiden und Spielen mit Effet bei punktförmigen Körpern auch vorstellen?)