Inhaltsverzeichnis

1 Modulation

Wir haben im Unterricht Amplituden- und Frequenzmodulation kennen gelernt. Mathematisch relativ einfach erklärt sich hierbei die Amplitudenmodulation (AM) dadurch, dass einem hochfrequenten Trägersignal (carrier) ein niederfrequentes Signal als Amplitude aufmultipliziert wird. Handelt es sich bei der Trägerwelle z.B. um eine Radiowelle der Frequenz 1 MHz in der Form:

$$c(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 1000000 \cdot t)$$

mit der Zeit t in Sekunden, so kann dieser problemlos ein reiner akustischer Ton der Frequenz 1 kHz aufmoduliert werden, indem das Produkt aus $c(t)$ und $s(t)$ gebildet wird:

$$s(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t)$$

mit der Zeit t in Sekunden. Und es ergibt sich das AM-Signal $a(t)$:

$$a(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 1000000 \cdot t)$$

2 Schwebung

Außerdem wurde im Unterricht das Phänomen der Schwebung demonstriert. Hierbei hören wir z.B. zwei Stimmgabeln die relativ hohe Grundschwingungen haben, wobei eine der beiden jedoch in der Frequenz etwas von der anderen abweicht. Offenbar wird durch die Überlagerung der beiden Töne ein neuer Ton gebildet, der laut und leise anschwillt. Handelt es sich bei der ersten Stimmgabel z.B. um einen relativ tiefen Ton der Frequenz 100 Hz in der Form:

$$y_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t)$$

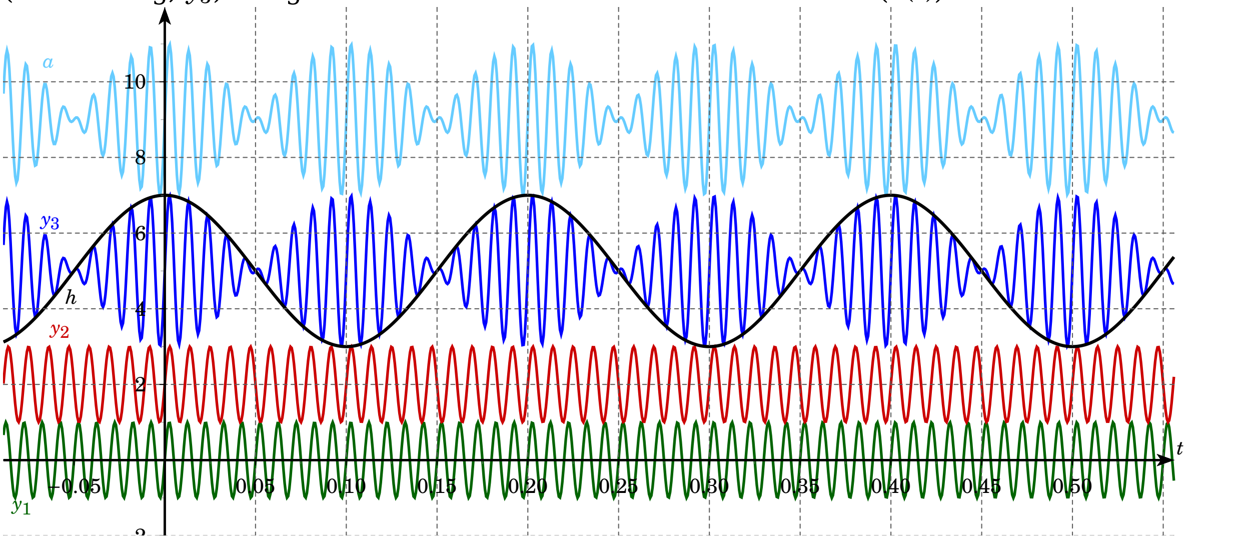
mit der Zeit t in Sekunden, so kann problemlos ein reiner akustischer Ton der Frequenz 90 Hz aufaddiert werden, indem die Summe aus $y_1(t)$ und $y_2(t)$ gebildet wird:

$$y_2(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 90 \cdot t)$$

mit der Zeit t in Sekunden. Und es ergibt sich die Schwebung $y_3(t)$:

$$y_3 = y_1(t) + y_2(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot 90 \cdot t)$$

Stellt man dies graphisch dar, so erkennt man dass die Überlagerung der beiden Töne (Schwebung, y_3) das gleiche mathematische Bild wie das der AM ($a(t)$) liefert:



$y_1(t) = \sin(2\cdot\pi\cdot 100\cdot t)$ $\quad y_2(t) = \sin(2\cdot\pi\cdot 90\cdot t)$ $\quad y_3 = y_1 + y_2$ $\quad y_3(t) = a(t) = 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 5\cdot t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 95\cdot t)$

in schwarz eine Variante einer Hüllkurve $h(t) = 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 5\cdot t)$

Offenbar gilt also (unter Vernachlässigung der Absolutglieder[1]):

$$y1 + y2 = 1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 100\cdot t) + 1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 90\cdot t) \tag{1}$$

$$= (1+1)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot|100-90|\cdot t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot|100+90|\cdot t}{2}\right) \tag{2}$$

$$= 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 5\cdot t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 95\cdot t) \tag{3}$$

Die Schwebung ist also wie eine AM, bei der der Trägerschwingung (hier 95 Hz) mit dem Mittelwert der Stimmgabelfrequenzen ein Signal (hier 5 Hz) mit der halben Differenz der Stimmgabelfrequenzen aufmoduliert wird. Das aufmodulierte Signal mit der Frequenz 5 Hz ist durch die einhüllende Funktion $h(t)$ in der Graphik (schwarz) hervor gehoben.

3 Mathematische Zusammenhänge

Dies gilt mathematisch ganz allgemein, wie sich aus den Additionstheoremen zeigen lässt:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Weiter evtl. nützlich: Die trigonometrischen Funktionen lassen sich ineinander umwandeln oder gegenseitig darstellen. Es gelten folgende Zusammenhänge: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und Umstellungen
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, und Umstellungen
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, und Umstellungen
$\sin(x + \pi/2) = \cos x$,

[1] In der Graphik wurden Absolutglieder +2, +5 und +9 eingeführt, um die einzelnen Graphen besser unterscheiden zu können. In der Rechnung fallen diese unnötigen Absolutglieder natürlich weg.

$\cos(x + \pi/2) = -\sin x$,
$\sin(x + y)\sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x$,
$\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x$,
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y)\cos(x + y)$,
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)$, und (vgl. oben)
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)$.

4 Weitere Feinheiten

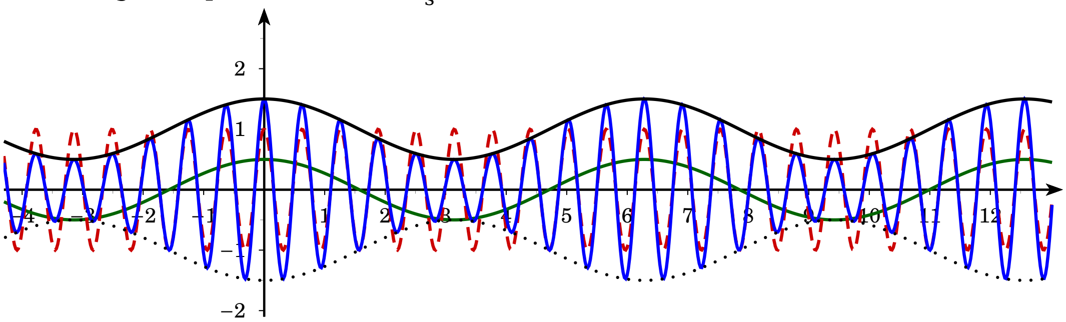
Statt der einfachen Multiplikation wird eine etwas kompliziertere Operation durchgeführt, damit die Hüllkurve $h(t)$ des modulierten Signals $a(t)$ direkt dem Nutzsignal entspricht. Wieder wird das Nutzsignal $s(t) = \hat{s}\cos(\omega t)$ mit dem Trägersignal (carrier) $c(t) = \hat{c} \cdot \cos(\Omega t)$ moduliert:
Hierbei wird zum Nutzsignal $s(t)$ ein so genannter Gleichanteil $\hat{c}$ addiert und diese Summe mit der hochfrequenten Trägerschwingung $\cos(\Omega t)$ multipliziert.
Wiederum ist die Trägerfrequenz (Ω) größer als die Frequenz des übertragenen Signals ω: $\Omega \gg \omega$.
Mit dem Modulationsgrad m wird angegeben, wie stark das modulierende Nutzsignal die Amplitude des modulierten (Träger-)Signals beeinflusst. Er ist einfach $m = \frac{\hat{s}}{\hat{c}}$ und sollte zwischen 0 und 1 liegen: $0 < m < 1$.
Dann ist das modulierte Signal

$$a(t) = \big(\hat{c} + \hat{s}\cos(\omega t)\big)\cos(\Omega t) = \big(1 + m\cos(\omega t)\big)c(t)$$

Nach den inzwischen bekannten Additionstheoremen ergibt sich

$$a(t) = c(t) + \frac{\hat{s}}{2}\left(\cos\left((\Omega - \omega)t\right) + \cos\left((\Omega + \omega)t\right)\right)$$

Veranschaulichen wir dies mit dem Modulationsgrad $m = 0{,}5$ und der relativ „hochfrequenten“ Trägerfrequenz $\Omega = 10\omega = \frac{10}{\mathrm{s}} = 10$ Hz:



grün $s(t) = 0{,}5 \cdot \cos(1 \cdot t)$ gestrichelt $c(t) = 1 \cdot \cos(10 \cdot t)$ $a(t) = (1 + 0{,}5 \cdot \cos(1 \cdot t))\cos(10 \cdot t)$ blau
Die Hüllkurve in schwarz zeigt sich direkt als das verschobene grüne Signal $s(t)$.