# 1 Aufgabe 4 vom Abitur 2010 zum Themenbereich Lineare Algebra

Zwei Waschbärenpaare wurden 1934 erstmalig in Deutschland am Edersee in Hessen ausgesetzt. Bis dahin gab es die putzigen, nordamerikanischen Tiere nicht wild in Deutschland. Inzwischen haben sich die Waschbären stark verbreitet und ihren Lebensraum sowohl in Wäldern als auch in Städten gefunden. Trotz genetischer Armut der Population hat sich diese prächtig entwickelt.
Wie in der Populationsdynamik üblich, werden in dieser Aufgabe nur weibliche Waschbären (Fähen) betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt:
$w$ Anzahl nicht geschlechtsreifer weiblicher Tiere, von der Geburt bis zu einem Jahr (Welpen).
$j$ Anzahl junger, gerade geschlechtsreifer Fähen, von einem bis zwei Jahren (Junge).
$r$ Anzahl reifer Fähen, zwei Jahre und älter (Reife). Eine Population von Fähen wird zum Beobachtungsbeginn durch einen Populationsvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} w \\ j \\ r \end{pmatrix}$ dargestellt, mit Matrix-Vektor-Multiplikation soll der Populationsvektor für das Folgejahr berechnet werden. Für eine im Wald lebende Population gilt:

- Junge, gerade geschlechtsreife Fähen bringen in jedem Jahr im Schnitt 1,9 weibliche Welpen zur Welt, reifere Fähen dagegen nur 1,4
- Ca. 54% der Welpen sterben noch in ihrem ersten Lebensjahr, von den Jungen sterben jährlich ca. 43% und von den Reifen ca. 58%.

a)

- Geben Sie für die Überlebens- und Geburtenraten ein Übergangsdiagramm an.
- Entscheiden Sie, welche der drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}46 & 0 \\ 1{,}9 & 0 & 0{,}57 \\ 1{,}4 & 0 & 0{,}42 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ 0{,}46 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}57 & 0{,}42 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ 0{,}54 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}43 & 0{,}58 \end{pmatrix}$$

dem Übergangsdiagramm entspricht, so dass für eine Anfangspopulation $\vec{v}_0$ mit der Matrix-Vektor-Multiplikation eine Vorhersage über die Entwicklung der Waschbärenpopulation gemacht werden kann. Begründen Sie mit jeweils einem Argument, warum die beiden anderen Matrizen nicht geeignet sind.

(6 Punkte)

In den Städten sind die Lebensbedingungen für die extrem anpassungsfähigen Waschbären noch besser. Die folgende Matrix $P$ beschreibt die Waschbärenpopulation in einer Stadt S relativ gut.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie davon aus, dass sich die Waschbären in der Stadt S über einen Zeitraum von mehr als 25 Jahren gemäß der Matrix $P$ ausbreiten konnten. Für $P^{24}$ gilt auf eine Nachkommastelle gerundet:

$$P^{24} = \begin{pmatrix} 82{,}6 & 206{,}6 & 154{,}9 \\ 33{,}1 & 82{,}6 & 62{,}0 \\ 24{,}8 & 62{,}0 & 46{,}5 \end{pmatrix}$$

Nach 24 Jahren zählt man in der Stadt S insgesamt 263 Fähen mit ca. 23,5% Jungen und 17,5% Reifen.

b)

- Geben Sie $\vec{v}_{24}$, die Verteilung nach 24 Jahren, in absoluten Zahlen (auf ganze Zahlen gerundet) an. Zu Beginn der Waschbärenbeobachtung (zum Zeitpunkt 0) soll ein Paar mit einer reifen Fähe in S gelebt haben. Zeigen Sie, dass diese Angabe stimmen kann.
- Berechnen Sie $\vec{v}_{25}$ auf ganze Zahlen gerundet. Zeigen Sie, dass die prozentuale Verteilung nach 25 Jahren mit der nach 24 Jahren übereinstimmt, wenn man auf ganze Prozentpunkte rundet.
- Berechnen Sie den prozentualen Zuwachs der Fähen vom 24. zum 25. Jahr.
- Welche Vermutung können Sie aus den Ergebnissen für das langfristige Wachstumsverhalten der Waschbären ableiten? Geben Sie diese Vermutung an und begründen Sie sie.

(11 Punkte)

c) Die Matrix $P$ besitzt eine stabile Verteilung mit Wachstumsfaktor $k = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

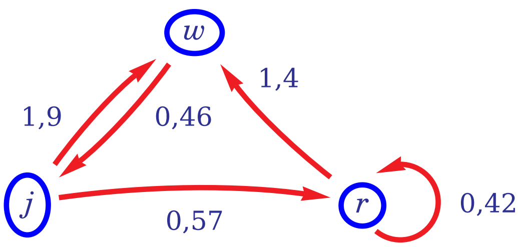
- Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) an, mit dem man die zugehörige stabile prozentuale Verteilung $\vec{v}_s$ berechnen kann.
- Zeigen Sie, dass $\vec{v}_s = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ die stabile prozentuale Verteilung ist.
- Aufgrund von Beobachtungen geht man davon aus, dass in Städten ca. 45 weib-

liche Waschbären pro Quadratkilometer leben können. Die Stadt S hat eine ungefähre Ausdehnung von 100 km$^2$. Bereits nach 20 Jahren wurde in S eine stabile Verteilung mit 108 Fähen erreicht. Berechnen Sie, nach wie vielen weiteren Jahren die Tiere erstmalig in das ländliche Umland abwandern müssen, da der städtische Lebensraum überfüllt ist. Die Ausbreitung entspricht weiterhin der Matrix $P$.

(8 Punkte)

## 2 Ausführliche Lösung

a) Aus dem Text folgt, dass 100%-54%=0,46 der Welpen in einem Jahr zu Jungen werden. Aus den Jungen werden zu 100%-43%=0,57 reife Fähen. Von den Reifen erleben 100%-58%=0,42 das folgende Jahr. Pro junge Fähe gibt es 1,9 Welpen, pro reife Fähe gibt es 1,4 Welpen. Diese Angaben ergeben das nebenstehende Übergangsdiagramm.




Die Matrix $B$ korrespondiert zu obigem Diagramm. Matrix $A$ ist schon deshalb nicht geeignet, da die erste Zeile besagt, dass die reifen Fähen keine Welpen zur Welt bringen. Matrix $C$ enthält statt der Geburtenraten die angegebenen Sterberaten.

b) Der Anteil der Welpen beträgt 100% abzüglich 23,5% Jungen und 17,5% Reifen, also 59%, von insgesamt 263 Weibchen.

Gerundet ergibt sich demnach $\vec{v}_{24} = 263 \begin{pmatrix} 0{,}59 \\ 0{,}235 \\ 0{,}175 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 155 \\ 62 \\ 46 \end{pmatrix}$, als Verteilung nach 24 Jahren.

Zum Vergleich betrachten wir den Anfangszustand mit nur einem reifen Weibchen nach 24 Jahren: $P^{24} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 82{,}6 & 206{,}6 & 154{,}9 \\ 33{,}1 & 82{,}6 & 62{,}0 \\ 24{,}8 & 62{,}0 & 46{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 155 \\ 62 \\ 47 \end{pmatrix}$ (was insgesamt übrigens 264 Weibchen entspricht!) Also im Rahmen der Rundungsgenauigkeit stimmen beide Ergebnisse überein, es kann also sein, dass die gesamte Population Nachkommen eines einzigen Pärchens sind.

Ein Jahr später ergibt sich folgende Verteilung, wenn wir auf $\vec{v}_{24}$ noch einmal $P$ loslassen: $\vec{v}_{25} = P \cdot \vec{v}_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 155 \\ 62 \\ 47 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 193 \\ 78 \\ 58 \end{pmatrix}$ mit insgesamt 193 + 78 + 58 = 329 Fähen nach 25 Jahren. Rechnen wir nun die gerundeten Prozentpunkte aus: 155/263 ≈59%≈ 193/329, 62/263 ≈24%≈ 78/329 und schließlich 46/263 ≈18%≈ 58/329. Pi mal Daumen haben wir jetzt sowas wie eine fast stabile prozentuale Verteilung, die insgesamt mit dem Wachstumsfaktor 329/263 ≈1,25 anwächst, d.h. die Population wächst jährlich um 25%.

Die Vermutung ist, dass die nach 24 Jahren erreichte Verteilung fast stabil ist und die Population danach konstant mit dem Wachstumsfaktor $k = \frac{329}{263} \approx 1{,}25$ anwächst.

c) Für die stabile prozentuale Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt:

$$P \cdot \vec{v}_s = k \cdot \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1{,}25 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1{,}25 \cdot E \cdot \vec{v}_s$$

Um die stabile Verteilung (ohne Wachstumsfaktor $k$) auszurechnen haben wir bislang immer $P - E = 0$ in den `Casio fx-991ES` (MODE 5,2) eingeben und die letzte Zeile durch eine Gleichung $x + y + z = 1$ ersetzt. Das Vorgehen zur Bestimmung von $\vec{v}_s$ ist jetzt ganz analog, nur dass wir statt $P - E$ nun $P - 1{,}25 \cdot E$ haben.

Aus $P - 1{,}25 \cdot E = 0$ und $x + y + z = 1$ ergibt sich das LGS (als erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben): $\left(\begin{array}{ccc|c} -1{,}25 & 2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Die rechnerische Lösung des LGS klappt wie gehabt mit dem `Casio fx-991ES` (MODE 5,2), wenn wir die 3. Zeile ersatzlos streichen (mit MODE 6 können wir überprüfen, dass die Determinante von $P - 1{,}25 \cdot E$ gleich null ist, so dass wieder die dritte Zeile durch Einsen aufgefüllt werden kann, ohne dass Information verschenkt wird): X=$\frac{10}{17}$ Y=$\frac{4}{17}$ Z=$\frac{3}{17}$.

Andererseits ist von uns gar nicht gefordert, $\vec{v}_s$ zu bestimmen. Wir müssen nur überprüfen, ob das gegebene $\vec{v}_s$ eine stationäre Verteilung ist, d.h. wir müssen zeigen, dass es die Gleichungen des LGS erfüllt. Wir sparen uns etwas Zeit, dass wir obiges LGS gar nicht selbst lösen müssen!

Multiplizieren wir gegebenes $P$ mit gegebenem $\vec{v}_s = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

ergibt sich tatsächlich

$$P\cdot\vec{v}_s=\begin{pmatrix}0&2&1{,}5\\0{,}5&0&0\\0&0{,}6&0{,}45\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{17}\begin{pmatrix}10\\4\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}12{,}5\\5\\3{,}75\end{pmatrix}=\frac{1{,}25}{17}\begin{pmatrix}10\\4\\3\end{pmatrix}=1{,}25\cdot\frac{1}{17}\begin{pmatrix}10\\4\\3\end{pmatrix}=1{,}25\cdot\vec{v}_s.$$

$\vec{v}_s$ erfüllt also tatsächlich alle Gleichungen, inklusive $\frac{1}{17}(10+4+3)=1$, d.h. $\vec{v}_s$ ist eine stabile (prozentuale) Verteilung. Absolut wachsen ja die einzelnen Anzahlen exponentiell mit dem Wachstumsfaktor $k=1{,}25$ an, d.h. es handelt sich nicht um eine absolute stabile Verteilung!

Die Kapazität ist $45\cdot 100=4500$ Fähen (bei Parität also rund 9000 Waschbären insgesamt) für die Stadt S. Nach 20 Jahren waren es bereits 108 Fähen. Wenn die Anzahl der Waschbären weiter exponentiell wächst, so muss man folgende Gleichung lösen: $108\cdot 1{,}25^n=4500$. Mathematisch hilft hier der „Rhythmus, wo jeder mit muss:“ der natürliche Logarithmus, denn $n=\ln(4500/108)/\ln(1{,}25)\approx 16{,}7143591$, im einzelnen:

$$\begin{aligned}
108\cdot 1{,}25^n &= 4500 && |:108\\
1{,}25^n &= \frac{4500}{108} && \text{(als e-Funktion schreiben)}\\
(e^{\ln 1{,}25})^n &= e^{\ln\frac{4500}{108}} && \text{(Potenzregel)}\\
e^{\ln 1{,}25\cdot n} &= e^{\ln\frac{4500}{108}} && |\ln\\
\ln 1{,}25\cdot n &= \ln\frac{4500}{108} && |:\ln(1{,}25)\\
n &= \frac{\ln(4500/108)}{\ln(1{,}25)}
\end{aligned}$$

Man kann aber beim exponentiellen Wachstum auch annehmen, dass nicht allzu oft mit 1,25 multipliziert werden muss, bis 4500 erreicht bzw. überschritten ist. Tippt man 108*1,25 in den Taschenrechner und multipliziert sukzessive mit 1,25, so ist nach 17 Schritten 4500 überschritten: $108\cdot 1{,}25^{17}\approx 4796>4500$. Bleibt die Zunahme unverändert, so müssen einige Waschbären erstmalig nach ca. 17 weiteren Jahren ins Umland übersiedeln, da die Population erstmalig die Kapazität der Stadt S überschritten hat.