

1 Vermischte Aufgaben, Lambacher/Schweizer, S. 213

LS führen auf S. 204 die wesentlichen Punkte einer Kurvendiskussion auf: Symmetrie, Nullstellen und Funktionswert an der Stelle Null, Extrema, Wendepunkte und Graph der Funktion. Für Extrema und Wendepunkte bestimmen wir zunächst die ersten drei Ableitungen, wobei nun auch Ketten- und Produktregel Anwendung finden.

1.1 7.a) $f(x) = 2x \cdot e^{1-x}$

Symmetrie: Weder YAS noch OPS, da mit e^{-x} -Funktion.

Ableitungen:

Mittels Produktregel und Kettenregel finden wir: $u(\square) = e^{\square}$, $\square = 1 - x$, $u'(\square) = e^{\square}$, $\square'(x) = -1$, $u'(x) = -e^{1-x}$, $v(x) = 2x$, $v'(x) = 2$, also $f(x) = v(x) \cdot u(x)$, $f'(x) = v'(x) \cdot u(x) + v(x) \cdot u'(x) = 2 \cdot e^{1-x} + 2x \cdot (-e^{1-x}) = (2 - 2x) \cdot e^{1-x} = -2(x - 1) \cdot e^{1-x}$. Analog erhalten wir $f''(x) = 2(x - 2) \cdot e^{1-x}$ und $f'''(x) = -2(x - 3) \cdot e^{1-x}$, alles mit Produktregel und Ausklammern der e-Funktion.¹

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

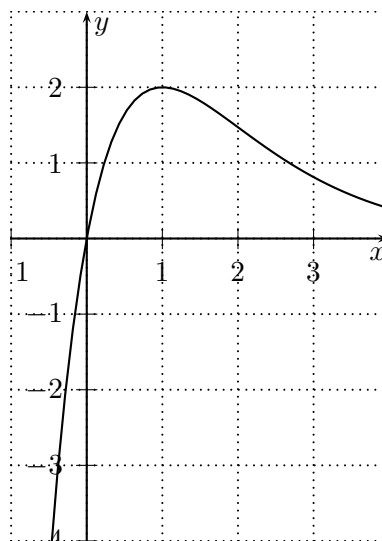
Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich über den Funktionswert an der Stelle Null: $f(0) = 0 \Rightarrow Y(0|0) \Rightarrow N(0|0)$. Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich über Nullstellen der Funktion: $f(x_N) = 0 \Rightarrow 0 = 2x_N \cdot e^{1-x_N} \Rightarrow N(0|0)$ ist einzige Nullstelle der Funktion (e-Funktion wird nie Null, EPiNweFNi).

Extrema:

Notwendige Bedingung für Extrema ist $f'(x_E) = 0$, d.h. $0 = -2(x - 1) \cdot e^{1-x}$. EPiNweFNi: -2 und e-Funktion sind nie Null, $x - 1$ wird Null, für $x_E = 1$. Einsetzen in f'' ergibt $f''(1) = 2(1 - 2) \cdot e^{1-1} = -2 < 0$, d.h. es liegt ein Hochpunkt bei $x_H = 1$ vor. Wir setzen x_H noch in f ein, um den y-Wert des Hochpunktes zu bestimmen: $f(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1-1} = 2$, d.h. $H(1|2)$.

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist $f''(x_w) = 0$, d.h. $0 = 2(x - 2) \cdot e^{1-x}$. EPiNweFNi: 2 und e-Funktion sind nie Null, $x - 2$ wird Null, für $x_w = 2$. Einsetzen in f''' ergibt $f'''(2) = 2(2 - 3) \cdot e^{1-2} \neq 0$, d.h. es liegt ein Wendepunkt bei $x_w = 2$ vor. Wir setzen x_w noch in f ein, um den y-Wert des Wendepunktes zu bestimmen: $f(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{1-2} = \frac{4}{e} \approx 1,47$, d.h. $W(2|1,47)$.



1.2 7.c) $f(x) = (x + 1) \cdot e^{-x}$

Ableitungen:

Mittels Produktregel und Kettenregel finden wir: $f'(x) = -xe^{-x}$, $f''(x) = (x - 1)e^{-x}$ und $f'''(x) = -(x - 2)e^{-x}$ wobei wir wieder die e-Funktion ausklammern.²

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich über den Funktionswert an der Stelle Null:

¹Du hast richtig geraten, wenn Du annimmst, dass die vierte Ableitung $2(x - 4) \cdot e^{1-x}$ wird.

²Du hast richtig geraten, wenn Du annimmst, dass die vierte Ableitung $(x - 3) \cdot e^{-x}$ wird.

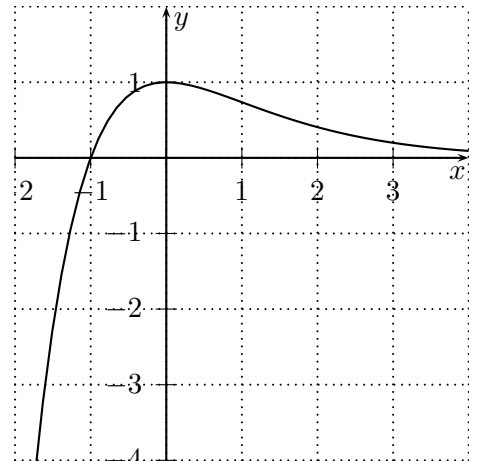
$f(0) = 1 \Rightarrow Y(0|1)$. Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich über Nullstellen der Funktion : $f(x_N) = 0 \Rightarrow 0 = (x_N + 1) \cdot e^{-x_N} \Rightarrow N(-1|0)$ ist einzige Nullstelle der Funktion (e-Funktion wird nie Null, EPiNweFNi).

Extrema:

Notwendige Bedingung für Extrema ist $f'(x_E) = 0$, d.h. $0 = -x \cdot e^{-x}$. EPiNweFNi: e-Funktion wird nie Null, $x_E = 0$. Einsetzen in f'' ergibt $f''(0) = (0 - 1) \cdot e^{-0} = -1 < 0$, d.h. es liegt ein Hochpunkt bei $x_H = 0$ vor. Wir setzen x_H noch in f ein, um den y-Wert des Hochpunktes zu bestimmen: $f(0) = (0 + 1) \cdot e^{-0} = 1$, d.h. $H(0|1)$.

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist $f''(x_w) = 0$, d.h. $0 = (x - 1) \cdot e^{-x}$. EPiNweFNi: e-Funktion wird nie Null, $x - 1$ wird Null, für $x_w = 1$. Einsetzen in f''' ergibt $f'''(1) = -(1 - 2) \cdot e^{-1} \neq 0$, d.h. es liegt ein Wendepunkt bei $x_w = 1$ vor. Wir setzen x_w noch in f ein, um den y-Wert des Wendepunktes zu bestimmen: $f(1) = (1 + 1) \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0,74$, d.h. $W(1|0,74)$.

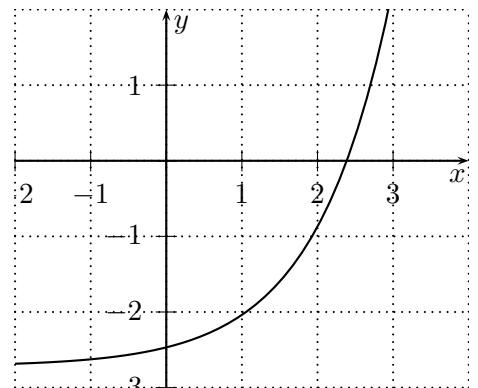


Weder YAS noch OPS.³

1.3 10.a) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - e$

Der Graph von f begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche A . Skizzieren Sie den Graphen und berechnen Sie A .

In dieser Aufgabenstellung ist das Kurvendiskussionsprogramm teilweise versteckt. Offenbar muss man die Achsenschnittpunkte berechnen, und für die Fläche muss man aufleiten können. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich über den Funktionswert an der Stelle Null: $f(0) = 0,25 - e \approx -2,468281828459 \Rightarrow Y(0 | -2,47)$. Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich über Nullstellen der Funktion : $f(x_N) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{4} \cdot e^{x_N} - e | + e, \Rightarrow e = \frac{1}{4} \cdot e^x | \cdot 4, \Rightarrow 4e = e^x | \ln \Rightarrow \ln(4e) = x_N \approx 2,38629 \Rightarrow N(2,39|0)$. Offenbar muss man für die gesuchte Fläche A die Funktion von 0 bis x_N integrieren.



Wir wissen, dass die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - e$ die Funktion $F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - e \cdot x + C$ ist, was wir durch Ableiten leicht überprüfen können. Für die Fläche gilt dann: $A = -\int_0^{\ln(4e)} \frac{1}{4} \cdot e^x - e dx = -\frac{1}{4} \cdot e^{\ln(4e)} + e \cdot \ln(4e) - (-\frac{1}{4}) = e \cdot (\ln(4e) - 1) + \frac{1}{4} \approx 4,01833877$ (vgl. Skizze).

In gleicher Weise lassen sich die Flächen der Teilaufgaben 10.b-d) berechnen: 10.b) $A \approx 0,39$, 10.c) $A \approx 2,54$ und 10.d) $A \approx 0,65$.

³Für alle diese Funktionen gilt, dass keine Symmetrie erkennbar ist. Erst wenn eine gerade Potenz von x im Exponenten auftaucht, wie bei $f(x) = e^{-x^2}$, kann auch wieder YAS oder OPS auftreten.