1 Abstand zwischen Punkt A und Gerade g

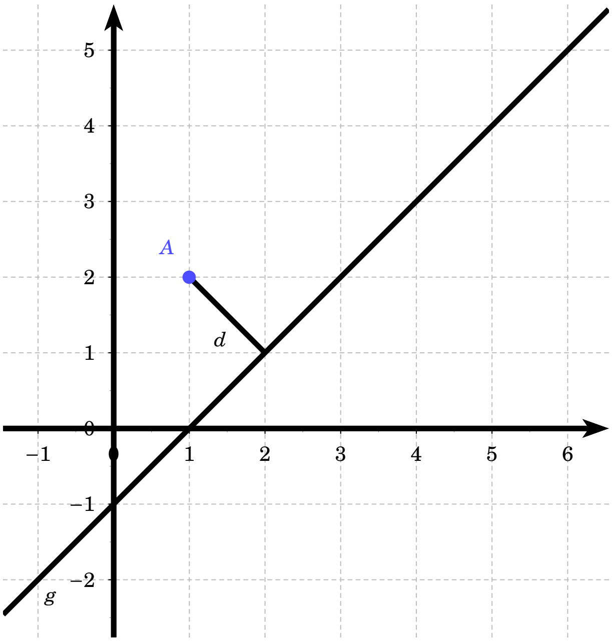
Der Abstand zwischen 2 Objekten ist als die minimale Entfernung definiert: $d(A,g) = \min(\overline{Ag})$.

1.1 Bestimmung mit dem Lotfußverfahren

Die Strecke $\overline{Ag}$ zwischen A und g wird minimal genau dann, wenn sie senkrecht auf der Geraden steht. Der Punkt L der Geraden g ist dann der Lotfußpunkt der Geraden g, da dort das Lot senkrecht von der Geraden g zum Punkt A verläuft. Lot, rechter Winkel, orthogonal und verschwindendes Skalarprodukt kann man synonym verwenden, d.h. das Skalarprodukt aus Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden g und Differenzvektor $\overrightarrow{AL}$ ist null: $\overrightarrow{AL} * \vec{v} = 0$. Diese Gleichung lösen wir nach dem Parameter der Gerade auf und bestimmen dann mittels Pythagoras die Länge des Differenzvektor $d(g,A) = |\overrightarrow{AL}|$.

1.2 Simples Beispiel

$A(1|2)$ und Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (die in Koordinatenform auch als $y = x - 1$ bekannt ist).



Bloßes Draufschauen verrät uns, dass der Abstand $d = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$ Längeneinheiten ist. Das Lot fußt offenbar im Punkt $L(2|1)$, aber wir tun mal so, als müssten wir dies formal alles berechnen. Also der unbekannte Lotfußpunkt L ist ein Punkt der Geraden g in Parameterform mit dem zu bestimmenden Parameter λ_L. L hat den Ortsvektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_L \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen den Parameter λ_L indem wir die Orthogonalität benutzen:

$$\overrightarrow{AL} * \vec{v} = 0$$

wobei hier $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor der Geraden ist. Konkret rechnen wir das Skalarprodukt

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_L \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

aus und lösen nach λ_L auf.

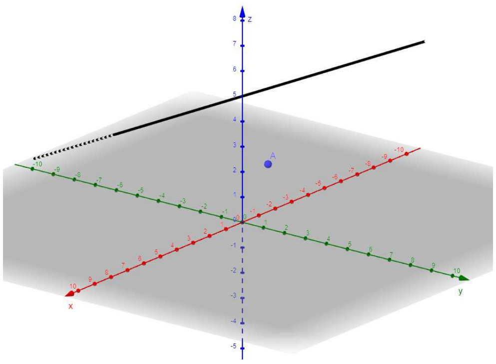
$$\begin{aligned} \lambda_L - 1 + (-1) + \lambda_L - 2 &= 0 \\ 2 \cdot \lambda_L - 4 &= 0 \\ 2 \cdot \lambda_L &= 4 \\ \lambda_L &= 2 \end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda_L = 2$ ein erhalten wir den Ortsvektor vom Lotfußpunkt L: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $L = (2|1)$ wie aus der Abb. klar ist.

Schließlich können wir den Abstand mit Pythagoras bestimmen $d(g,A) = |\overrightarrow{AL}| = \left|\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

1.3 Fieses Beispiel

$A(1|2|3)$ und Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Hier kann man mit bloßem Auge nur noch abschätzen, dass der Abstand irgendwo zwischen 2 und 3 (oder 4?) liegt. Doch nun wissen wir wie es geht und wie man den Abstand ausrechnet. Der Ansatz $\overrightarrow{AL} * \vec{v} = 0$ liefert uns λ_L und damit $\vec{l}$ und damit L und schließlich $d(g,A) = d(A,L) = |\overrightarrow{AL}|$.

Der Ortsvektor zu A ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden g ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit rechnen wir mit

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_L \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

und fassen zusammen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_L \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Skalarprodukte ergeben $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + \lambda_L \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0$, also $9 + 6 \cdot \lambda_L = 0 \Longrightarrow \lambda_L = -\frac{9}{6} =$ -1,5.

Dies setzen wir in die Gerade ein und erhalten den Ortsvektor des Lotfußpunktes

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ist $L(0{,}5|1|5{,}5)$.

Der gesuchte Abstand ist $d(g,A) = |\overrightarrow{AL}| = \left| \begin{pmatrix} 0{,}5 - 1 \\ 1 - 2 \\ 5{,}5 - 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (-1)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{7{,}5} \approx 2{,}74$.

Ich erspare mir eine weitere Projektion und verweise auf die Geogebra-Datei `https://www.geogebra.org/classic/kx3cpgda`.