

1 Definition

Die rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ Elementen a_{ij} in m Zeilen und n Spalten heißt $m \times n$ -Matrix. Gewöhnlich handelt es sich bei den Elementen a_{ij} der Matrix um reelle Zahlen.

2 Besondere Typen

2.1 Vektoren

Die Matrizen vom Typ $1 \times n$ heißen auch Zeilenvektoren, die Matrizen vom Typ $m \times 1$ heißen auch Spaltenvektoren, letztere werden auch gemeinhin kurz Vektoren genannt.

2.2 Quadratische Matrix

Bei einer quadratischen Matrix ist die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten: $m = n$. Z.B. ist folgende 2×2 -Matrix A quadratisch:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3 Diagonalmatrix

Eine (quadratische) Diagonalmatrix D hat nur Elemente auf der Hauptdiagonalen die ungleich Null sind, z.B.:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.4 Einheitsmatrix

Eine besondere Diagonalmatrix ist die Einheitsmatrix E . Sie hat als Elemente auf der Hauptdiagonalen ausschliesslich Einsen, allen anderen Elemente sind Null, z.B.:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Nullmatrix

Bei der Nullmatrix O sind alle Elemente gleich Null, z.B.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Obere Dreiecksmatrix

Außerdem ist beim Gauß-Verfahren noch die Obere Dreiecksmatrix von besonderer Bedeutung. In diese Form wird jede Matrix mittels Äquivalenzumformungen überführt, so dass man ein LGS lösen kann, siehe http://warncke-family.de/g12/LGS_LS_S009.pdf.

3 Addition und Subtraktion von Matrizen

Die Addition von (zwei) Matrizen gleichen Typs (also Matrizen gleicher Zeilen- und gleicher Spaltenzahl) erfolgt durch die Addition entsprechender Elemente. Da Addition und Subtraktion elementweise geschieht, sind Addition und Subtraktion von Matrizen auch nur für Matrizen von dem gleichen Typ definiert. Sind die Matrizen A, B vom Typ $m \times n$, dann versteht man unter ihrer Summe eine Matrix C mit den Elementen: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Die Summe C ist (wieder) eine Matrix vom Typ $m \times n$.

Ein simples Beispiel ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4 Skalarmultiplikation

Eine Matrix wird mit einer reellen Zahl, einem sogenannten Skalar, multipliziert, indem alle Elemente der Matrix mit dem Skalar multipliziert werden, z.B.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

5 Matrixmultiplikation

Das Produkt der $m \times n$ -Matrix A und der $p \times q$ -Matrix B kann nur für $n = p$ gebildet werden. Die Produktmatrix C hat ist dann vom Typ $m \times q$. Zwei Matrizen werden miteinander multipliziert, indem nach folgenden Schema „Zeile auf Spalte“ gelegt werden: Gegeben sind die Matrizen A, B :

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ und } B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es soll das Produkt $C = AB$ ermittelt werden. C ist eine 3×2 -Matrix.

			Spalte 1	
			-1	1
Zeile 1			1	-2
	1	4	3	
	2	5		
	3	-6		
			Spalte 2	
			-1	1
Zeile 1			1	-2
	1	4	3	-7
	2	5		
	3	-6		
			Spalte 1	
			-1	1
Zeile 2			1	-2
	1	4	3	-7
	2	5	3	
	3	-6		

Die erste Zeile von A wird elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert:
 $1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 3$ und ergibt das Element $c_{11} = 3$.

Nun wird die erste Zeile von A elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert:
 $1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -7$ und ergibt das Element $c_{12} = -7$.

Nun wird die zweite Zeile von A elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{21} = 3$.

		Spalte 2	
		-1	1
Zeile 2			-2
1	4	3	-7
2	5	3	-8
3	-6		

		Spalte 1	
		-1	1
Zeile 3			-2
1	4	3	-7
2	5	3	-8
3	-6	-9	

		Spalte 2	
		-1	1
Zeile 3			-2
1	4	3	-7
2	5	3	-8
3	-6	-9	15

Nun wird die zweite Zeile von A elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{22} = -8$.

Nun wird die dritte Zeile von A elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{31} = -9$.

Schließlich wird die dritte Zeile von A elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{32} = 15$.

Das Produkt $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -8 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$ existiert. Dagegen ist nicht das Produkt BA möglich.

Wenn beide Matrizen vom gleichen quadratischen Typ sind, dann kann man sowohl das Produkt AB als auch das Produkt BA bilden, aber man sollte beachten, dass beide Produkte i.A. nicht gleich sind, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Besonders augenscheinlich wird dies, wenn wir folgendes Beispiel (mit sog. Vektoren) betrachten:

$$(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14). \text{ Dagegen } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Ersteres Produkt ist eine } 1 \times 1\text{-}$$

Matrix und wird gern von Physikern als ein Skalar missverstanden oder als sog. Skalarprodukt definiert. Letzteres Produkt ist eine 3×3 -Matrix und offensichtlich davon verschieden.

6 Determinante

Die Determinante einer Matrix A ist, falls sie existiert, eine Zahl. Determinanten können nur von quadratischen Matrizen berechnet werden. Ist die Determinante ungleich null, so ist das zugehörige Lineare Gleichungssystem (LGS, vgl.

http://warncke-family.de/g12/LGS_LS_S009.pdf) eindeutig lösbar. Entsprechend ist eine quadratische Matrix A genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich null ist. Falls die Determinante gleich null ist, so gibt es weder eine Inverse A^{-1} noch zu dem zugehörigen LGS eine Lösung. In diesem Sinne spielt die Determinante im Schulunterricht eine ähnliche Rolle für LGS wie die Diskriminante für quadratische Gleichungen

(vgl. http://www.warncke-family.de/g11a/quad_null.pdf), sie bestimmt (engl. determine) ob eine eindeutige Lösung existiert.

Für 2×2 -Matrizen gibt es eine einfache Formel zur Berechnung der Determinante, sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist die Determinante das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen minus dem Produkt der Elemente der Nebendiagonalen. Die Hauptdiagonale verläuft von oben links nach unten rechts, die Nebendiagonale von oben rechts nach unten links:

$$|A| = ad - bc$$

Vier Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 1, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|C| = -16, \quad C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

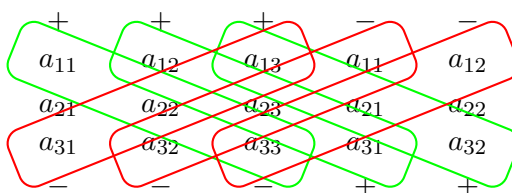
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|D| = -2, \quad D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Für eine 3×3 -Matrix A gilt die Formel

$$|A| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Man erhält diese Formel, wenn man nach der Regel von Sarrus die Matrix A um die ersten beiden Spalten erweitert, und dann ähnlich zur Formel für 2×2 -Matrizen (s.o.) von den Produkten der Elemente der Hauptdiagonalen die Produkte der Elemente der Nebendiagonalen abzieht:



Auch hier ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad |A| = -2 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3,5 & 2 \\ -1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

7 Inverse

Die Inverse zu einer Matrix A kehrt die Matrixoperation von A wieder vollkommen um. Es gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, d.h. die Verkettung von Matrixoperation und ihrer Inversen ist die Multiplikation mit einer Einheitsmatrix E , d.h. A und A^{-1} heben sich zur Einheitsmatrix auf. Ist man sich nicht sicher, ob man die gesuchte Inverse gefunden hat, so gilt die Matrixmultiplikation von $A^{-1} \cdot A$ bzw. $A \cdot A^{-1}$ als Probe: ist alles okay, so kommt E heraus. Erst wenn die Determinante einer Matrix A ungleich null ist: $|A| \neq 0$, dann kann man zu dieser Matrix auch eine Inverse A^{-1} finden. Bislang haben wir implizit Inverse berechnet, wenn wir LGS gelöst haben. Der Zusammenhang ist formal recht einfach:

Gesucht ist die Lösung \vec{x} des LGS: $A\vec{x} = \vec{b}$. Wenn wir die Inverse zu A kennen und diese von links multiplizieren, dann erhält man:

$$A^{-1} | \quad A\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad E\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Die Lösung \vec{x} eines LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist also recht simpel formal $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, theoretische Physiker sprechen somit z.B. gern vom Invertieren und meinen damit das Lösen von großen LGS.

Es gibt nicht nur einen formalen, sondern auch einen formelhaften Zusammenhang zwischen Inverser und Determinante, so dass nicht unbedingt mittel Gauß-Verfahren die Inverse berechnet werden muss.

Formel für 2×2 -Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Formel für 3×3 -Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Allgemein sind also folgende Aussagen für quadratische Matrizen A gleichwertig:

- Die Determinante der Matrix A ist ungleich Null: $\det A \equiv |A| \neq 0$.
- Die Matrix A ist invertierbar: A^{-1} existiert und es gilt $|A^{-1}| = \frac{1}{\det A}$.
- Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar und hat eine eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Besitzer des für die Prüfung zugelassenen Taschenrechners Casio fx-991 ES können Determinanten, Inverse etc. schnell berechnen lassen,

siehe <http://www.warncke-family.de/g12/Anleitung%20Casio%20fx-991ES.pdf>.