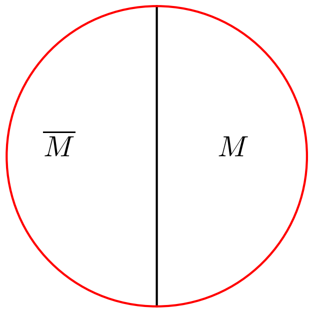
1 Gegenteil und Gegenereignis

Spätestens seit der Spongebob-Folge zum Gegenteil-Tag wissen Schüler, dass die Beschäftigung mit dem Gegenteil einer Sache in Chaos enden kann.

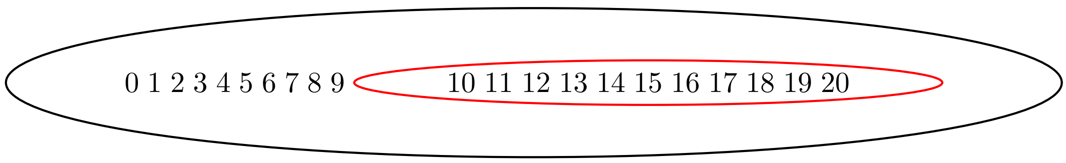
Im Mathematikunterricht der Stochastik mache ich gern von der Komplementärregel Gebrauch: Ist eine Menge M eine Teilmenge einer anderen Menge S, so schreibt man $M \subset S$. Elemente aus S, die nicht in M enthalten sind, fassen wir in die Menge $\overline{M}$ zusammen. Die Menge $\overline{M}$ heißt kurz Nicht-M, Mathematiker nennen sie auch das Komplement zu M. Es gilt $M \cap \overline{M} = \varnothing = \{\}$ und $M \cup \overline{M} = S$. Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(M \cap \overline{M}) = 0$ und $P(M) + P(\overline{M}) = 1$ also insbesondere auch $P(M) = 1 - P(\overline{M})$. Nebenstehend als Venn-Diagramm (der rote Kreis symbolisiert S, die linke Hälfte $\overline{M}$ und die rechte Hälfte M):



Beispielsweise könnte die Menge S die Zahlen von 1 bis 30 umfassen, und M sind darin die geraden Zahlen („durch 2 teilbar“) und $\overline{M}$ sind die ungeraden Zahlen („nicht durch 2 teilbar“). So weit - so einfach.

Nützlich wird diese Regel beispielsweise, wenn M und $\overline{M}$ höchst ungleich verteilt sind (unterschiedliche Mächtigkeit haben), so dass z.B. M viel mehr Elemente hat als $\overline{M}$. Aufgabe: Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Würfeln eine Augensumme größer als 6 zu würfeln. Kniffel-Erfahrene werden wissen, dass die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses „Augensumme ist kleiner oder gleich 6“ wesentlich kleiner ist, denn dieses Gegenereignis setzt sich nur zusammen aus $\overline{M} = \{$⚀⚀⚀⚀⚀; ⚀⚀⚀⚀⚁; ⚀⚀⚀⚁⚀; ⚀⚀⚁⚀⚀; ⚀⚁⚀⚀⚀; ⚁⚀⚀⚀⚀$\}$, also aus nur 6 Elementen. Wir wissen dass es für 5 Würfel mit 6 Seiten insgesamt $6^5 = 7776$ Möglichkeiten gibt, logisch bleiben also $7776 - 6 = 7770$ Möglichkeiten mit einer Augensumme größer als 6. Die Lösung der Aufgabe ist also $P(\overline{M}) = \frac{6}{7776} = \frac{1}{1296} \approx 0{,}08$ %, $P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 1 - \frac{6}{7776} = \frac{1295}{1296} \approx 99{,}92$ %, mit fast an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit darf man erwarten mit 5 Würfeln eine Augensumme größer als 6 zu erwürfeln.

Wandern wir nun von Zahlen und Würfeln zu den lieben Schülern. In einem Mathematikkurs „mögen mindestens 10 von 20 Schülern Mathe“ (M). Was ist hierzu das Gegenereignis? (Nicht nur) Schüler verwechseln das Gegenereignis mit dem Gegenteil. Folgende Aussagen wurden von Schülern getroffen: A=„Höchstens 10 Schüler mögen Mathematik nicht“, B =„Höchstens 10 Schüler mögen Mathematik“, C =„Mindestens 10 Schüler mögen Mathematik nicht“, D =„Weniger als 10 Schüler mögen Mathematik“, E =„Höchstens 9 Schüler mögen Mathematik“. Zum Glück gibt es die Mengenlehre, die das Wirrwarr klären hilft:



Das Mengendiagramm zeigt rot die Menge M und macht deutlich, dass „richtige Gegenereignisse“ im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Logik die Mengen zu den Ereignissen (Aussagen) C, D und E sind: $\overline{M} = E$. Passt auf: das „Gegenteil“ zu „alle mögen Mathe“ ist in diesem Sinne nicht „Keiner mag Mathe“! Tatsächlich ist aber das Ergebnis „0 Schüler in einem Kurs mögen Mathe“ („Keiner mag Mathe“) auch ein prinzipiell mögliches Ergebnis - auch wenn ich das nicht hoffen will!