Systematisierung quadratischer Funktionen

1 Definition

Eine Funktion in Allgemeiner Form (AF) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a,b,c,x,f \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heißt quadratische Funktion und hat die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Die Teile der Funktionsgleichung lassen sich so benennen: ax^2 heißt quadratisches Glied, bx heißt lineares Glied und c heißt Absolutglied oder auch y-Achsenabschnitt, weil der Graph der Funktion die y-Achse beim Wert c schneidet.

2 Graph der quadratischen Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion heißt Parabel. Diese weist immer eine Symmetrie zu einer Spiegelachse auf. Falls die Funktionsgleichung kein lineares Glied hat, so ist die Parabel symmetrisch zur y-Achse (YAS). Eine Parabel hat auch immer einen Scheitelpunkt, der auf der oben genannten Spiegelachse liegt, so dass man die Funktionsgleichung (AF) auch in Scheitelpunktform (SpF) schreiben kann:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{AF}$$

$$f(x) = a \cdot (x - x_E)^2 + y_E \tag{SpF}$$

Der Scheitelpunkt[1] $E(x_E \mid y_E)$ ist je nach Vorzeichen von a ein Maximum bzw. Hochpunkt (für $a < 0$) oder ein Minimum bzw. Tiefpunkt (für $a > 0$). Man berechnet den Scheitelpunkt aus der AF mithilfe der quadratischen Ergänzung (qE)[2]:

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}$$

[1] Nun nenne ich den Scheitelpunkt E, weil er ein Extrempunkt der Parabel ist und damit er nicht mit einem Schnittpunkt S verwechselt wird.

[2] Mit der quadratischen Ergänzung führt man die quadratische Gleichung auf eine binomische Formel zurück.

Verdeutlichen wir an einem konkreten **Beispiel**, wie aus AF die SpF hergeleitet wird:

$$y = 2x^2 - 3x + 5 \tag{AF}$$

$$= 2\left(\underbrace{x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\overbrace{- \left(\frac{3}{4}\right)^2}^{=0\ (\text{qE})}\underbrace{+ \frac{5}{2}}\right) \tag{| qE}$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right)$$

$$y - \frac{31}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \tag{SpF}$$

Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten $E(\frac{3}{4} \mid \frac{31}{8})$.

Ähnlich wie mit der pq-Formel lassen sich die Scheitelpunktkoordinaten direkt mit einer Formel angeben: $x_E = -\frac{p}{2}$ ist die x-Koordinate (Stelle) , $y_E = a \cdot \left(-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$ ist die y-Koordinate des Scheitelpunktes, wobei $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ wie bei der pq-Formel definiert sind.

Ist der Scheitelpunkt $E(x_E \mid y_E)$ ein Maximum bzw. Hochpunkt (für $a < 0$), so ist der Graph monoton steigend für $x < x_E$ und monoton fallend für $x > x_E$. Ist der Scheitelpunkt $E(x_E \mid y_E)$ ein Minimum bzw. Tiefpunkt (für $a > 0$), so ist der Graph monoton steigend für $x > x_E$ und monoton fallend für $x < x_E$.

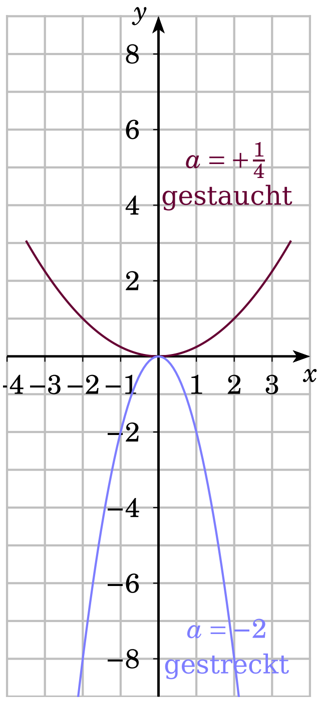
Das quadratische Glied (ax^2) in der Funktionsgleichung (AF) ist entscheidend für den Kurvenverlauf hinsichtlich der Öffnung und asymptotischen Verhalten der Parabel.

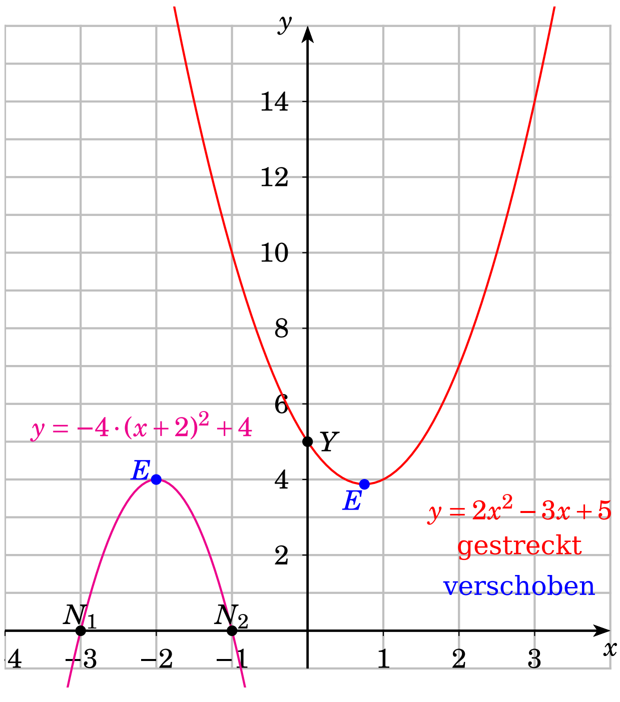
Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn das a im quadratischen Glied größer als Null ist ($a > 0$).

Die Parabel ist nach unten geöffnet, wenn das a im quadratischen Glied kleiner als Null ist ($a < 0$).

Außerdem gilt:
a) $|a| = 1$, dann ist der Graph eine Normalparabel und kann schnell mit der Normalparabelschablone gezeichnet werden.
b) $|a| > 1$, dann ist der Graph eine gestreckte Parabel (also entweder $a > 1$ oder $a < -1$).
c) $|a| < 1$, dann ist der Graph eine gestauchte Parabel (also $-1 < a < 1$).

Verdeutlichen wir dies an graphischen **Beispielen:**





3 Schnittpunkte mit den Achsen

Den Schnittpunkt mit der y-Achse ersieht man sofort aus der AF, denn da quadratisches und lineares Glied von x abhängen, die y-Achse jedoch bei $x = 0$ liegt, ist der Schnittpunkt mit der y-Achse: $Y(0 \mid c)$.

Schnittpunkt(e) mit der x-Achse sind wesentlich schwerer zu ermitteln:
Hierzu muss man drei Fälle unterscheiden (lat. discriminare = unterscheiden). Als Hilfsgröße wird die sogenannte Diskriminante eingeführt.

Für die Diskriminante D gilt[3]: $D = -\frac{y_E}{a} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
a) Ist $D > 0$, so hat die Parabel zwei Nullstellen, $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$. Die entsprechenden Schnittpunkte $N_{1,2}$ mit der x-Achse liegen symmetrisch um den Scheitelpunkt bei $N_1(-\frac{p}{2} - \sqrt{D} \mid 0)$ und $N_2(-\frac{p}{2} + \sqrt{D} \mid 0)$

b) Ist $D = 0$, so hat die Parabel eine Nullstelle $x_1 = -\frac{p}{2}$. Die Parabel berührt dann die x-Achse bei $N(-\frac{p}{2} \mid 0)$. Ebenso geht dann die Symmetrieachse durch diese Nullstelle.

c) Ist $D < 0$, so hat die Parabel keine Nullstelle. Die Parabel ist so geöffnet und vom Scheitelpunkt so gelegt, dass der Graph weder die x-Achse schneiden noch berühren kann.

Um eine Nullstelle zu berechnen, löst man immer eine Gleichung $f = 0$. Ist die Funktion in AF gegeben, so muss man $ax^2 + bx + c = 0$ lösen. Da nach Voraussetzung $a \neq 0$ gilt, kann man die Funktion normieren, d.h. die Gleichung durch a teilen und in die sogenannte Normalform (NF)

[3] D mit der positiven Zahl $4a^2$ multipliziert ergibt die Diskriminante $D^\star = b^2 - 4ac$, die wie D in gleicher Weise die Fälle a)–c) unterscheidet.

bringen und wie gehabt mit qE lösen:

$$\begin{aligned}
0 &= ax^2 + bx && +c && \text{AF } |:a \\
0 &= x^2 + px && +q && \text{NF} \\
&= \underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 && +q && \text{qE} \\
&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && \underbrace{-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} && \text{D} \\
&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && -D && |+D \\
D &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && && |\sqrt{} \\
\pm\sqrt{D} &= x_{1,2} + \frac{p}{2} && && |-\tfrac{p}{2} \\
-\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{D} &= x_{1,2} && && (\text{pq-Formel})
\end{aligned}$$

Je nach Diskriminante D kann man für obige quadratische Gleichung (egal ob in AF oder NF) eine Lösungsmenge der Gleichung angeben. Da AF und NF äquivalent sind, haben beide Formen der Gleichung die gleiche Lösungsmenge $\mathbb{L}$:
a) Ist $D > 0$, so ist $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ und die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1; x_2\}$
b) Ist $D = 0$, so gibt es nur eine Lösung $x_1 = -\frac{p}{2}$ und die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{x_1\}$
c) Ist $D < 0$, so gibt es keine Lösung der Gleichung und die Lösungsmenge ist leer $\mathbb{L} = \{\}$.

4 Sonstiges

Die Lösungen aus den Fällen a) bzw. b) erlauben es auch die Funktionsgleichung in einer weiteren Form anzugeben, der sogenannten LF (Produkt aus Linearfaktoren):
$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ im Fall a) bzw. $f(x) = a \cdot (x - x_1)^2$ im Fall b).
Nach dem Satz von Vieta gibt es einen Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen aus Fall a) und den Koeffizienten p, q:
$p = \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$
$q = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$
Außerdem kann man leicht den Scheitelpunkt E der Parabel angeben, wenn die Lösung(en) dieser quadratischen Gleichung bekannt sind:
$x_E = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow E(x_E \mid f(x_E))$
Sollten Grundlagen der Differentialrechnung bekannt sein, so kann man den Scheitelpunkt auch mittels erster und zweiter Ableitung bestimmen:
Als erstes bildet man die erste Ableitung f' aus $f(x) = ax^2 + bx + c$ und erhält $f'(x) = 2ax + b$. Diese 1. Ableitung ist beim Scheitelpunkt Null und man bestimmt die Extremalstelle x_E aus der Gleichung $0 = 2ax_E + b$ und erhält $x_E = -\frac{b}{2a}$. Dann untersucht man die zweite Ableitung für x_E. Ist diese größer Null ☺, so handelt es sich um ein Minimum ($f''(x_E) = 2a > 0$). Ist diese kleiner Null ☹, so handelt es sich um ein Maximum ($f''(x_E) = 2a < 0$), und der Scheitelpunkt ist ein Hochpunkt, d.h. die Parabel ist nach unten geöffnet. Schließlich muss noch die y-Koordinate ausgerechnet werden und der Scheitelpunkt ist $E(x_E \mid f(x_E))$.