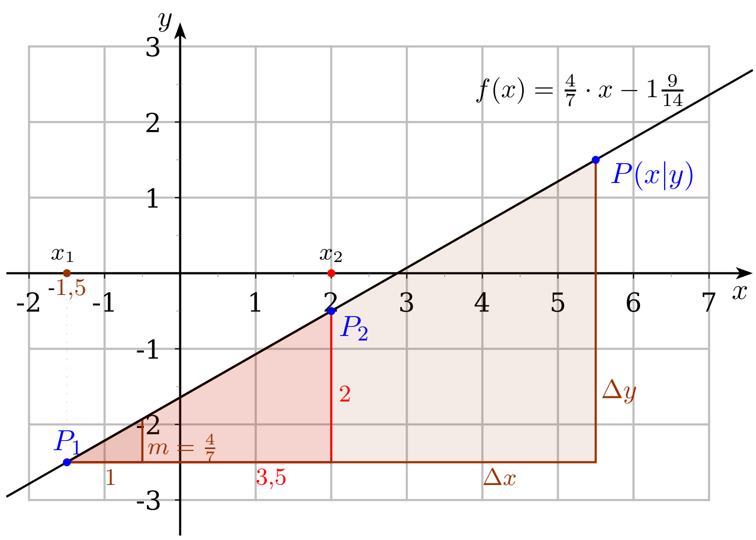
1 Die Zwei-Punkte-Form für Geraden

Lineare Funktionen können mittels der Zwei-Punkte-Form (2PF) eindeutig bestimmt werden. Voraussetzung ist, dass 2 Punkte gegeben sind, durch die die Gerade verläuft. Dass eine Gerade eindeutig durch zwei Punkte bestimmt ist, ist den meisten SuS klar. Dennoch macht der Umgang und das Verständnis der 2PF Schwierigkeiten.

Eine Gerade hat nur eine einzige Steigung m, hätte sie mehr als eine Steigung, so wäre sie ja auch nicht mehr gerade :-). Diese Steigung lässt sich als Differenzenquotient schreiben: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Für m ist es dabei unerheblich, wie groß die Differenzen sind. Ist bei einer Geraden Δx größer gewählt, so ist Δy verhältnismäßig ebenfalls größer.

Anhand einer Skizze wird dieser Sachverhalt klarer:

Gegeben: 1. Punkt $P_1(x_1|y_1)$, 2. Punkt $P_2(x_2|y_2)$
Zum Beispiel: $P_1(-1{,}5|-2{,}5)$, $P_2(2|-0{,}5)$
Die Steigung ist dann **konkret** der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0{,}5+2{,}5}{2+1{,}5} = \frac{2}{3{,}5} = \frac{4}{7}$ wie man im Bild sieht. Die Steigung hat nur diesen einen Wert, den man immer erhält, egal welches Steigungsdreieck man heran zieht. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ bezieht sich auf das **große** Steigungsdreieck mit $P_1(x_1|y_1)$ und einem **beliebigen** Punkt $P(x|y)$, der lediglich auf der Geraden liegen muss. $\frac{4}{7}$ bezieht sich auf das 1. Steigungsdreieck links, mit $\Delta x = 1$, $\frac{2}{3{,}5}$ bezieht sich auf das 2. Steigungsdreieck in rot.
$y = \frac{-0{,}5+2{,}5}{2+1{,}5} \cdot (x + 1{,}5) - 2{,}5 = \frac{4}{7} \cdot (x + 1{,}5) - 2{,}5 = \frac{4}{7} \cdot x + \frac{4}{7} \cdot 1{,}5 - 2{,}5 = \frac{4}{7} \cdot x - 1\frac{9}{14}$



Abstrakt ergibt sich aus der Skizze mit einem **beliebigen** Punkt $P(x|y)$ der Geraden aus der Eindeutigkeit der Steigung m die Gleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht umstellen in die sogenannte **Zwei-Punkte-Form**:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$