1 Potenzrechnung

Ein Term der Form a^n (lies: a hoch n) heißt Potenz, genauer n-te Potenz von a. Dabei heißt n Hochzahl oder Exponent und a Grundzahl oder Basis der Potenz. Es ist

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Beispiel: $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ Faktoren}} = 32$

1.1 1. Rechenregel (gleiche Basen, multiplizieren oder dividieren)

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Beispiel: $2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ Faktoren}}}_{3+4=7 \text{ Faktoren}} = 2^7 = 128$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

Beispiel: $4^5 : 4^2 = \frac{4^5}{4^2} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^{5-2} = 4^3 = 64$

1.2 2. Rechenregel (gleiche Basis, mehrfaches potenzieren)

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Beispiel: $\left(2^3\right)^2 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Faktoren}})^2 = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Faktoren}}}_{3 \cdot 2 = 6 \text{ Faktoren}} = 2^6 = 64$

1.3 3. Rechenregel (gleiche Exponenten)

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert (dividiert), indem man die Basen multipliziert (dividiert) und die Exponenten beibehält.

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m} \qquad \boxed{a^m : b^m = (a : b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Beispiel: $6^2 \cdot 3^2 = 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = (6 \cdot 3)^2 = 18^2 = 324$

Beispiel: $9^2 : 3^2 = (9 \cdot 9) : (3 \cdot 3) = \frac{9 \cdot 9}{3 \cdot 3} = \frac{9}{3} \cdot \frac{9}{3} = \left(\frac{9}{3}\right)^2 = 9$

1.4 Vereinbarungen (Exponenten $n \notin \mathbb{N}$)

Schauen wir uns die Vereinbarungen für die Exponenten genauer an: Nach Regel 1.1 sollte klar sein, dass $\boxed{a^1 = a}$, denn hier besteht das „Produkt" nur aus dem einen Faktor a.
Wir setzen für den Exponenten $n = 0$ fest: $\boxed{a^0 = 1}$, wobei $a \neq 0$, denn $0 = n - n$ und wir können obige Regel 1.1 anwenden: $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = \frac{\cancel{a^n}}{\cancel{a^n}} = \frac{1}{1} = 1$, woraus ersichtlich ist, dass $a \neq 0$.
Uns ist bereits klar, wie wir mit negativen Exponenten $n < 0$ umgehen: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, denn dies haben wir implizit mit der Regel 1.1 bereits angewendet.
Hierbei gilt wie gesagt die Einschränkung für die Basis: $a \neq 0$.
Wenn wir die Basis weiter auf positive Zahlen einschränken ($a > 0$), können wir sogar rationale Exponenten benutzen, und definieren:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Damit haben wir die Umkehrung zum Potenzieren verdeutlicht: das Wurzelziehen! Wenden wir hierzu Regel 1.2 an:
Beispiel: $\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$, denn $\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ bzw. wir wissen, dass die dritte Wurzel das Kubieren aufhebt.
Somit können wir abschließend festlegen, dass $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$.
Beim Rechnen müssen wir beachten, dass Klammer vor Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung geht!
Bezüglich Umkehrfunktion verweise ich auf das Dokument
`http://www.warncke-family.de/fos/umkehrfunktion.pdf`.