1 Kurvendiskussion heißt Nullstellen finden

Nullstellen sind diejenigen x, für die eine Funktion Null wird. Man geht aus von der Ausgangsfunktion f, die Nullstellen hat, wo $f = 0$ ist, betrachtet dann die Punkte, in denen die Steigung der Ausgangsfunktion f Null wird, indem man die Steigungsfunktion f' Null setzt und nach x auflöst. Schließlich findet man die Nullstellen der „Krümmungsfunktion“ f'' um Wendepunkte aufzuspüren, in denen sich das Krümmungsverhalten umkehrt.

Kurvendiskussion ist also ein sehr schematisches Verfahren, das sich noch verkürzter mit folgender Tabelle zusammen fassen lässt:

x	f	f'	f''	f'''	Zu bestimmender Punkt	Zeichen
$= 0$					Schnittpunkt mit der y-Achse	S_y
	$= 0$				Schnittpunkt mit der x-Achse	N
		$= 0$	$\neq 0$		Extrempunkt	E
		$= 0$	> 0		Tiefpunkt	T
		$= 0$	< 0		Hochpunkt	H
		$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	Sattelpunkt = Terrassenpunkt	
			$= 0$	$\neq 0$	Wendepunkt	W

2 Mikrobeispiel: Reinquadratische Funktion

$f(x) = x^2 - 4$ ist eine simple ganzrationale Funktion vom Grad $n = 2$, eine reinquadratische Funktion. Ganzrationale Funktionen vom Grad n haben genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse, nach dem Fundamentalsatz maximal n Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen), maximal $n-1$ Extrema und maximal $n-2$ Wendepunkte.

S_y: notwendige Bedingung: $x = 0$, einsetzen: $f(0) = -4 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid -4)$

N: notwendige Bedingung: $f = 0$, benutzen um x_N zu finden: $f(x_N) = x_N^2 - 4 = 0 \quad | \quad \pm\sqrt{}$

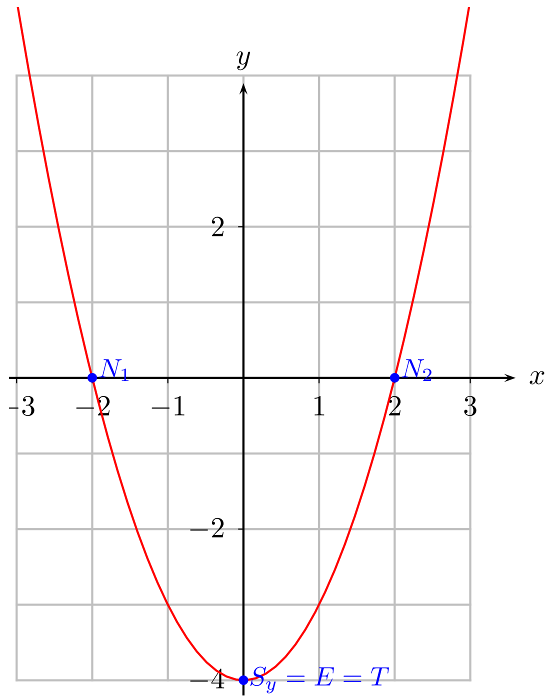
$\Rightarrow x_{N1} = -2,\ x_{N2} = 2 \quad \Rightarrow \quad N_1(-2|0),\ N_2(2|0)$

E: notwendige Bedingung: $f' = 0$, $f'(x_E) = 2 \cdot x_E = 0 \Rightarrow x_E = 0$, hinreichende Bedingung: $f''(x_E) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad E(0 \mid -4)$

T: notwendige Bedingung: $f' = 0$, $f'(x_T) = 2 \cdot x_T = 0 \Rightarrow x_T = 0$, hinreichende Bedingung: $f''(x_E) = +2 > 0 \quad \Rightarrow \quad T(0 \mid -4)$

Ende

Mit dem Beweis von E war bereits bewiesen worden, dass ein Extremum existiert ($f' = 0$ und $f'' \neq 0$ war hinreichend dafür). Mit dem Beweis für den Tiefpunkt T war die Art dieses Extremums geklärt. Nach dem Fundamentalsatz war's das — mehr gibt's nicht in diesem Mikrobeispiel: Also keine weiteren Nullstellen, Extrema bzw. Tiefpunkte, und nicht einmal einen Hoch- oder Wendepunkt. Vielleicht zum Schluss noch eine Skizze der diskutierten Parabel:



http://warnckes.info/fos/kurvendiskussion_02.pdf