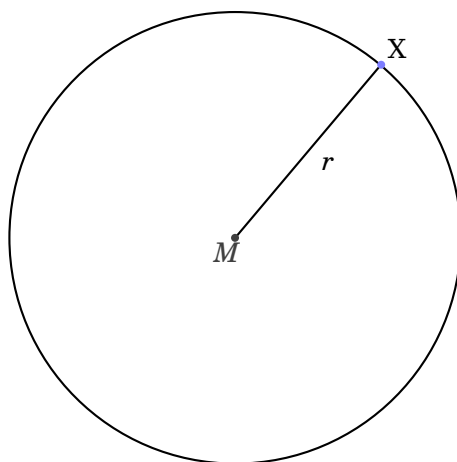


1 Die Kreisgleichung

Ein Kreis wird konstruiert, indem man um einen Punkt M eine Linie zieht (Schnur oder Zirkel), so dass diese überall den gleichen Abstand (Radius r) zu M hat. Der so konstruierte Kreis hat den Radius r und den Durchmesser $2 \cdot r$. Für Kreisberechnungen ist die Kreiszahl π bedeutsam: Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$, Fläche $A = \pi \cdot r^2$, mit $\pi \approx 3,14159$. Mathematiker drücken die Definition wie folgt aus:

Def. des Kreises: Die Menge aller Punkte X einer Ebene, die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die Kreislinie¹ k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r :

$$k[M,r] = \{X | \overline{XM} = r\}$$



$$|\overrightarrow{MX}| = r \quad (1)$$

$$|X - M| = r \quad (2)$$

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \right| = r \quad (3)$$

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r \quad (4)$$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \quad (5)$$

¹Nach dieser Definition ist ein Kreis eine eindimensionale, geschlossene Kurve, und keine zweidimensionale Fläche. Analog kann man die Kreisfläche als Menge aller Punkte der Ebene definieren, deren Abstand von M höchstens r ist: $\mathcal{K} = \{X | \overline{XM} \leq r\}$.

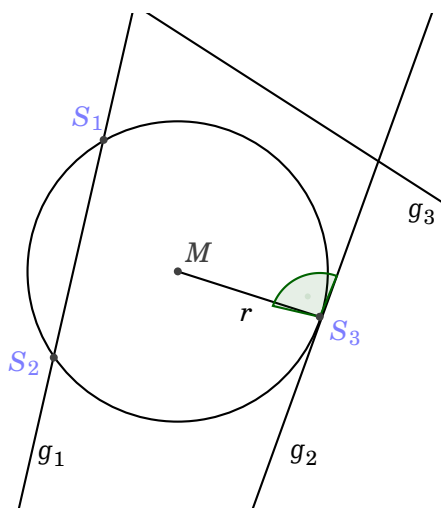
2 Alternative Formen der Kreisgleichung

$$\left[X - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^2 = r^2 \quad (6)$$

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = r^2 \quad (7)$$

3 Kreisschnitte

3.1 Kreis - Geraden



$$g_1 \cap k = \{S_1, S_2\} \quad (8)$$

$$g_1 \rightarrow \text{Sekante} \quad (9)$$

$$g_2 \cap k = \{S_3\} \quad (10)$$

$$g_2 \rightarrow \text{Tangente} \quad (11)$$

$$g_3 \cap k = \{\} \quad (12)$$

$$g_3 \rightarrow \text{Passante} \quad (13)$$

3.2 Methoden der Lagenbestimmung

Die Lage einer Geraden g zu einem Kreis k kann auf zwei Arten bestimmt werden:

- Abstandsbestimmung:

Gegeben ist ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r und eine Gerade g . Zuerst wird ein Punkt P auf der Geraden gesucht. Dieser ist, falls die Gerade in Vektorschreibweise

gegeben ist, schon aus der Angabe heraus zu lesen, ansonst wird entweder der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ oder ein ersichtlicher, passender Punkt berechnet. Projiziert man nun den Vektor \overrightarrow{PM} auf den normierten² Normalvektor der Geraden g so ergibt dies den Abstand d der Geraden g zum Mittelpunkt M des Kreises k . Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- $d < r \Rightarrow g$: Sekante
- $d = r \Rightarrow g$: Tangente
- $d > r \Rightarrow g$: Passante

- Einsetzverfahren:

Drückt man sich aus der Gleichung der Geraden g oder des Kreises k ³ eine Variable aus und setzt diese in die jeweils andere Gleichung ein. Als Ergebnis erhält man eine quadratische Gleichung deren Lösungsmöglichkeiten die Lagebeziehung beschreiben:

- $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow g$: Sekante
- $\exists x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow g$: Tangente
- $\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow g$: Passante

Diese Methode hat den Vorteil, dass hier auch gleich die x - bzw. y - Koordinate(n) der Schnittpunkte berechnet werden.

²Als normierter Vektor wird ein Vektor mit Länge 1 bezeichnet

³Praktischerweise wird die Unbekannte aus der Geraden g ausgedrückt, da hier nicht mit Quadraten gerechnet werden muss