

**1 Nullstellen der Funktion**  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 

Die gesuchten Nullstellen werden im Buch Jonczyk (orange), S. 9, Nr. 4.a) mittels Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_1 = -2$  bestimmt. Im Einzelnen:

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) =$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 5x \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ -4x^2 - 5x \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \\ 3x + 6 \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \\ 3x + 6 \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \\ 3x + 6 \\ \underline{-3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \\ 3x + 6 \\ \underline{-3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

**Polynom-Division Schritt für Schritt**

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \\ 3x + 6 \\ \underline{-3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

Alternativ mit dem Horner-Schema:

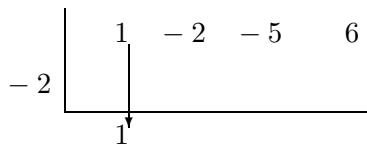
**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & & & \end{array}$$

**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$



**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

1  $\xrightarrow{(-2)}$

**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & + & \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$$

**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$$

(-2)

**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \end{array}$$

**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \swarrow^{(-2)} \end{array}$$

**4.a) Horner-Schema Schritt für Schritt zur Funktion**

$$f(x) = 1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & -2 & 8 & -6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & 0
 \end{array}$$

Das Horner-Schema zeigt also, dass für  $x_1 = -2$  eine Nullstelle vorliegt und dass der Quotient (Ergebnis der Division) dann  $1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$  lautet.

**Nullstellen der Funktion**  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 

mit klassischer Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\
 \underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
 -4x^2 - 5x + 6 \\
 \underline{+(4x^2 + 8x)} \\
 3x + 6 \\
 \underline{-(3x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Sowohl mit klassischer Polynomdivision als auch mittels Horner-Schema resultiert das Ergebnis  $x^2 - 4 \cdot x + 3$ , dessen Nullstellen mittels pq-Formel bestimmt werden:  $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$ , d.h.  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$  und  $x_3 = 3$

**4.e)**

Buch Jonczyk (orange), S.9, Nr. 4. e) Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_1 = 2$ :

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 - 16x + 20) : (x - 2) = x^2 + 3x - 10 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 +3x^2 - 16x + 20 \\
 \underline{-(+3x^2 - 6x)} \\
 -10x + 20 \\
 \underline{-(-10x + 20)} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung  $x^2 + 3x - 10 = 0$ , die sich mit pq zu  $x_{2,3} = -1,5 \pm 3,5$  ergibt. Die Nullstellen sind also  $x_{1,2} = 2$  (doppelte Nullstelle) und  $x_3 = -5$ .

**4.f)**

Nr. 4. f) Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_1 = -3$ , wobei man sich jetzt hier wieder die Klammern beim Abziehen spart:

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 27x^2 + 54x + 27) : (x + 3) = 4x^2 + 15x + 9 \\
 \underline{-4x^3 - 12x^2} \\
 15x^2 + 54x \\
 \underline{-15x^2 - 45x} \\
 9x + 27 \\
 \underline{-9x - 27} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung  $4x^2 + 15x + 9 = 0$ , die in Normalform zu  $x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} = 0$  wird und mit pq zu  $x_{2,3} = -\frac{15}{4} \pm \frac{9}{4}$  gelöst wird. Die Nullstellen sind also  $x_{1,2} = -3$  (doppelte Nullstelle, mögliche Extremstelle) und  $x_3 = -0,75$ .

**4.g)**

Nr. 4. g) Zunächst wird auf die Gleichung  $4x^4 - 8x^3 - 37x^2 + 20x = 0$  umgestellt. Dann erkennt man, dass man  $x = 0$  ausklammern kann, dass also  $x_1 = 0$  eine Nullstelle ist. Schließlich machen wir Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_2 = 4$

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 - 8x^2 - 37x + 20) : (x - 4) = 4x^2 + 8x - 5 \\
 \underline{-4x^3 + 16x^2} \\
 8x^2 - 37x \\
 \underline{-8x^2 + 32x} \\
 -5x + 20 \\
 \underline{5x - 20} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung  $4x^2 + 8x - 5 = 0$ , die in Normalform zu  $x^2 + 2x - \frac{5}{4} = 0$  wird und mit pq zu  $x_{3,4} = -1 \pm \frac{3}{2}$  gelöst wird. Die Nullstellen sind also  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = -2,5$  und  $x_4 = 0,5$ .

**4.h)**

Nr. 4. h) Zunächst wird auf die Gleichung  $x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = 0$  umgestellt. Dann erkennt man, dass man  $x = 0$  ausklammern kann, dass also  $x_1 = 0$  eine Nullstelle ist. Schließlich machen wir Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_2 = -1$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 - 2x - 2) : (x + 1) = x^2 - 2 \\
 \underline{-x^3 - x^2} \\
 -2x - 2 \\
 \underline{2x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur quadratischen Gleichung  $x^2 - 2 = 0$ , die sofort die Nullstellen  $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$  liefert. Zum Zeichnen näherungsweise sind die drei Nullstellen also  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 \approx 1,4$  und  $x_4 \approx -1,4$ .

#### 4.i)

Nr. 4. i) Zunächst wird auf die Gleichung  $x^5 + 3x^4 - x - 3 = 0$  umgestellt. Leider lässt sich hier nix ausklammern. Also machen wir Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_1 = -3$

$$\begin{array}{r}
 (x^5 + 3x^4 - x - 3) : (x + 3) = x^4 - 1 \\
 \underline{-x^5 - 3x^4} \\
 -x - 3 \\
 \underline{x + 3} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur biquadratischen Gleichung  $x^4 - 1 = 0$ , die sofort die Nullstellen  $x_{2,3} = \pm 1$  liefert. Also haben wir hier nur drei Nullstellen  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -1$  und  $x_3 = 1$ .

#### 5.j

Wir können sofort eine Polynomdivision mit der (geratenen) Nullstelle  $x_1 = -2$  durchführen:

$$\begin{array}{r}
 (x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2) = x^4 + 1 \\
 \underline{-x^5 - 2x^4} \\
 x + 2 \\
 \underline{-x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Division führt zur biquadratischen Gleichung  $x^4 + 1 = 0$ , die gar keine Nullstellen hat. Also haben wir hier nur die Nullstelle  $x_1 = -2$ .

## 2 Zusatzaufgaben

Macht die „Freiwilligen Übungsaufgaben zur Polynomdivision“ falls ihr weiter unsicher seid:  
[http://www.warncke-family.de/fos/übg\\_Polynomdivision\\_I.pdf](http://www.warncke-family.de/fos/übg_Polynomdivision_I.pdf).