Lösung	*Datum*
Analysis I - Kurvendiskussion FOS 12c	*20.11.2007*

1 Aufgabe 1

Gegeben sind folgende 5 Funktionen. Bilden Sie zu jeder Funktion die 1., 2. und 3. Ableitung.

1.1 $f(x) = 3 \cdot x^7 - 2 \cdot x^6 - 5\frac{1}{2} \cdot x^4 + 15$

$f'(x) = 21 \cdot x^6 - 12 \cdot x^5 - 22 \cdot x^3$
$f''(x) = 126 \cdot x^5 - 60 \cdot x^4 - 66 \cdot x^2$
$f'''(x) = 630 \cdot x^4 - 240 \cdot x^3 - 132 \cdot x$

1.2 $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^{24} - 23 \cdot x^2$

$f'(x) = 4 \cdot x^{23} - 46 \cdot x$
$f''(x) = 92 \cdot x^{22} - 46$
$f'''(x) = 2024 \cdot x^{21}$

1.3 $f(x) = 2 \cdot x^{2m} - 5 \cdot x^7 + 4, \quad m \in \mathbb{N}$

$f'(x) = 4m \cdot x^{2m-1} - 35 \cdot x^6$
$f''(x) = 4m(2m-1) \cdot x^{2m-2} - 210 \cdot x^5$
$f'''(x) = 8m(2m-1)(m-1) \cdot x^{2m-3} - 1050 \cdot x^4$

1.4 $f(x) = 4 \cdot x^{k+1} - 7 \cdot x^{k-1} + 4, \quad k \in \mathbb{N}$

$f'(x) = 4(k+1) \cdot x^k - 7(k-1) \cdot x^{k-2}$
$f''(x) = 4k(k+1) \cdot x^{k-1} - 7(k-1)(k-2) \cdot x^{k-3}$
$f'''(x) = 4(k^3-k) \cdot x^{k-2} - 7(k-1)(k-2)(k-3) \cdot x^{k-4}$

1.5 $f(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{2}{9} \cdot x^1 - 6 \cdot x^0$

$f'(x) = 4 \cdot x - \frac{2}{9}$
$f''(x) = 4$
$f'''(x) = 0$

2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2$.

2.1 $f = 0$

Nullstellen der Funktion $f(x)$: $0 = -\frac{1}{8} \cdot x_N^3 + \frac{1}{2} \cdot x_N^2$
$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{8} \cdot x_N^2 \cdot (x_N - 4) \Rightarrow x_N = 0 \vee x_N = 4$

2.2 $f' = 0$

Extrema der Funktion $f(x)$, d.h. $f'(x_E) = -\frac{3}{8} \cdot x_E^2 + x_E = 0$.

$\Rightarrow 0 = -\frac{3}{8} \cdot x_E \cdot (x_E - \frac{8}{3}) \Rightarrow x_E = 0 \vee x_E = \frac{8}{3}$

Die 2. Ableitung liefert die hinreichende Bedingung für Minimum bzw. Maximum.

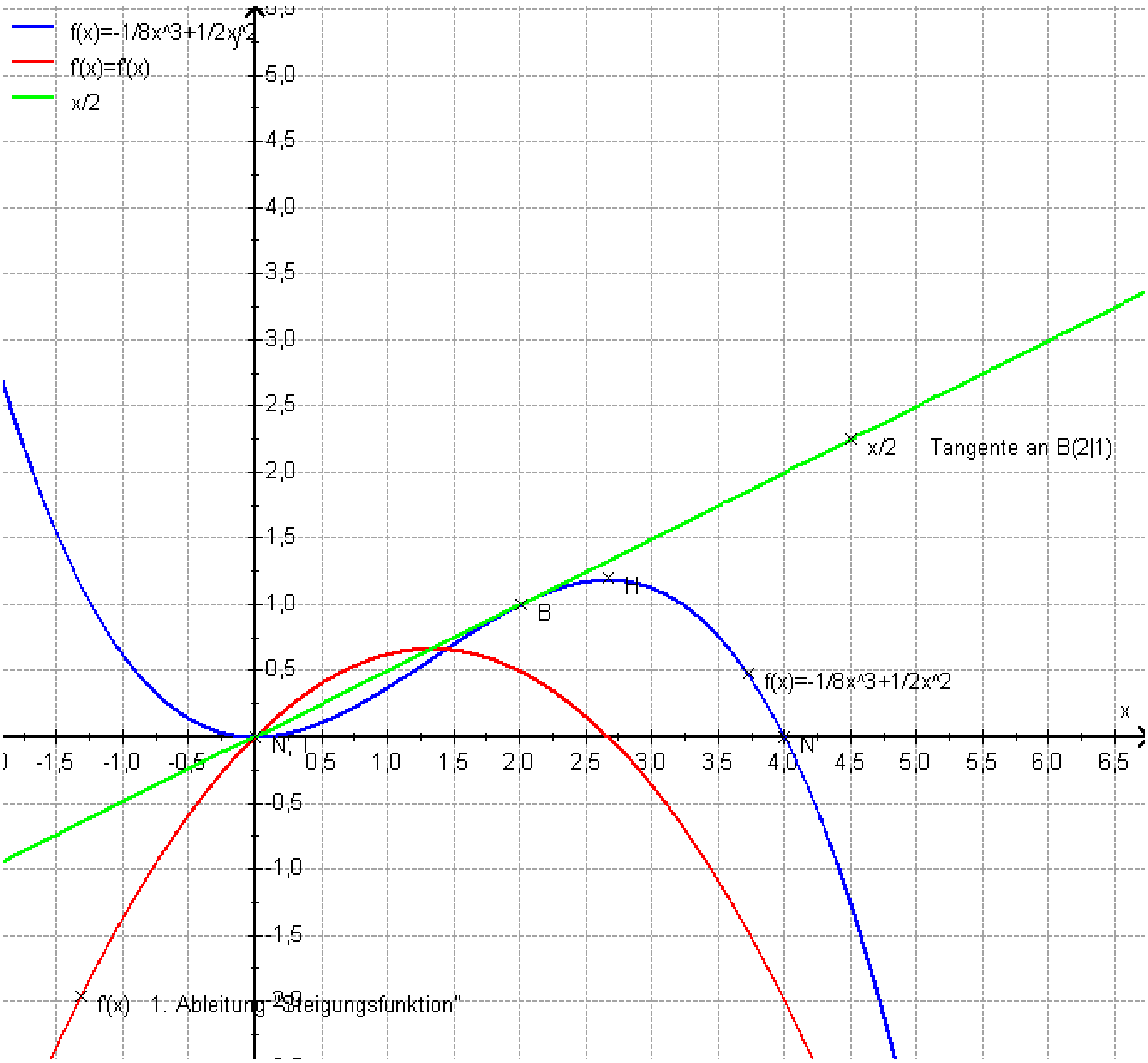
$f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + 1 \Rightarrow f''(0) = 1 > 0$ ☺ Also liegt bei $x = 0$ ein Minimum vor.

$f''(\frac{8}{3}) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$ ☹ Also liegt bei $x = \frac{8}{3}$ ein Maximum vor.

Die y-Werte der Extrema sind: $f(0) = 0$ und $f(\frac{8}{3}) = (-\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{8}{3})^2 = \frac{32}{27}$,

also sind die gesuchten Punkte Tiefpunkt $T(0|0)$ und Hochpunkt $H(\frac{8}{3}|\frac{32}{27})$, genähert zum Zeichnen $H(2,7|1,2)$.

2.3 Zeichnung



2.4 Tangente

Die Tangente im Punkt $B(2|1)$ ist in obiger Abbildung mit grüner Farbe eingezeichnet.

$f'(2) = -\frac{3}{8} \cdot 2^2 + 2 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$, bedeutet, dass die Steigung im Punkt B den Wert $m_B = \frac{1}{2}$ hat.

Da Tangente $t(x) = m_B \cdot x + b$ und Funktionsgraph $f(x)$ sich im Punkt B berühren, haben sie dort den gleichen Wert, d.h. $f(2) = 1 = t(2)$. Einsetzen dieses Wertes und der Steigung m_B in die Tangentengleichung $t(x) = m_B \cdot x + b$ liefert den y-Achsenabschnitt b: $1 = m_B \cdot 2 + b = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 0$. Die Tangente muss die Ursprungsgerade $t(x) = x/2$ sein, s. Abbildung in Aufgabe 2.

3 Differentialquotienten

Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_p = 8$ ableiten mittels Grenzwertbildung:

$$f'(x_p) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \quad \frac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x} = \frac{x_p^2 + 2x_p\Delta x + \Delta x^2 + 1 - x_p^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_p + \Delta x = 2x_p$$

Für $x_p = 8$ einsetzen ergibt $f'(8) = 2 \cdot 8 = 16$.

4 Graphen

Die erste Ableitung ist Kandidat `e` und die zweite Ableitung ist Kandidat `d`.