2. Klausur — Lösungen	*Datum*
Analysis I - Kurvendiskussion FOS 12c	*16.01.2008*

Name: Torsten Warncke

1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 + 10$

1.1 Was ist die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}$ dieser Funktion $f(x)$?

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, denn es gibt keine Einschränkung der Definitionsmenge.

1.2 Was ist das Symmetrieverhalten von $f(x)$?

Die Funktion ist y-achsensymmetrisch (YAS), denn sie hat nur gerade Exponenten.

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$

$0 = \frac{1}{8}x_N^4 - 3x_N^2 + 10$
Substitution $z = x^2$
$0 = \frac{1}{8}z_N^2 - 3z_N + 10| \cdot 8$
$0 = z_N^2 - 24z_N + 80|pq$
$z_{N1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 80}$
$z_{N1,2} = 12 \pm 8$
$z_{N1} = 20, \qquad z_{N2} = 4$
$z_N = x_N^2$
$x_{N1,2} = \pm\sqrt{20} \approx \pm 4{,}47, \qquad x_{N3,4} = \pm 2$

1.4 Bestimmen Sie die etwaigen Extrempunkte von $f(x)$

Bei einem Extrempunkt ist notwendig, dass gilt $f'(x_E) = 0$.
$0 = \frac{1}{2}x_E^3 - 6x_E|$ ausklammern
$0 = \frac{1}{2}x_E \cdot (x_E^2 - 12)|$ EPiNweFNi
$x_E = 0 \vee x_E^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_{E2,3} = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3{,}46$ Überprüfen dieser Kandidaten in 2. Ableitung:
$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Ja, es ist ein Extremum, und zwar muss es ein Hochpunkt sein!
$f''(\pm\sqrt{12}) = 12 > 0 \Rightarrow$ Ja, es ist ein Extremum, und zwar müssen es zwei Tiefpunkte sein!
Berechnen der y-Koordinaten:
$f(0) = 10 \Rightarrow H(0|10)$ ist der Hochpunkt.
$f(\pm\sqrt{12}) = -8 \Rightarrow T_{1,2}(\pm\sqrt{12}| - 8)$ sind die beiden Tiefpunkte.

1.5 Ermittlen Sie etwaige Wendepunkte von $f(x)$.

Bei einem Wendepunkt ist notwendig, dass gilt $f''(x_W) = 0$.
$0 = \frac{3}{2}x_W^2 - 6| \cdot \frac{2}{3}$
$0 = x_W^2 - 4| + 4$
$4 = x_W^2| \pm \surd$
$x_{W1,2} = \pm 2$ Überprüfen mit 3. Ableitung, ob die Kandidaten tatsächlich Wendepunkte sind:
$f'''(x_{W1,2}) = 3 \cdot x_{W1,2} = 3 \cdot \pm 2 = \pm 6 \neq 0$ Also liegen Wendepunkte bei ± 2 vor. Berechnung der y-Koordinaten ergibt:
$f(x_{W1,2}) = 0$, da bei ± 2 ja Nullstellen liegen. Die Wendepunkte sind $W_{1,2}(\pm 2|0)$.

2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$

2.1 Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte des Graphen der Funktion $f(x)$.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist offensichtlich: $x = 0 \Rightarrow Y(0|2)$. Den ersten Schnittpunkt mit der x-Achse können wir nur raten: eine Nullstelle liegt z.B. bei $x_{N1} = 1$. Weitere Nullstellen erhalten wir durch Polynomdivision:
$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$
EpinweFNi, also lösen wir $x^2 + x - 2 = 0$ mit der pq-Formel: $x_{N2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -0{,}5 \pm 1{,}5$, d.h. die Schnittpunkte mit der x-Achse sind: $N_1(1|0)$ (doppelte Nullstelle, vermutlich Extremum) und $N_2(-2|0)$.

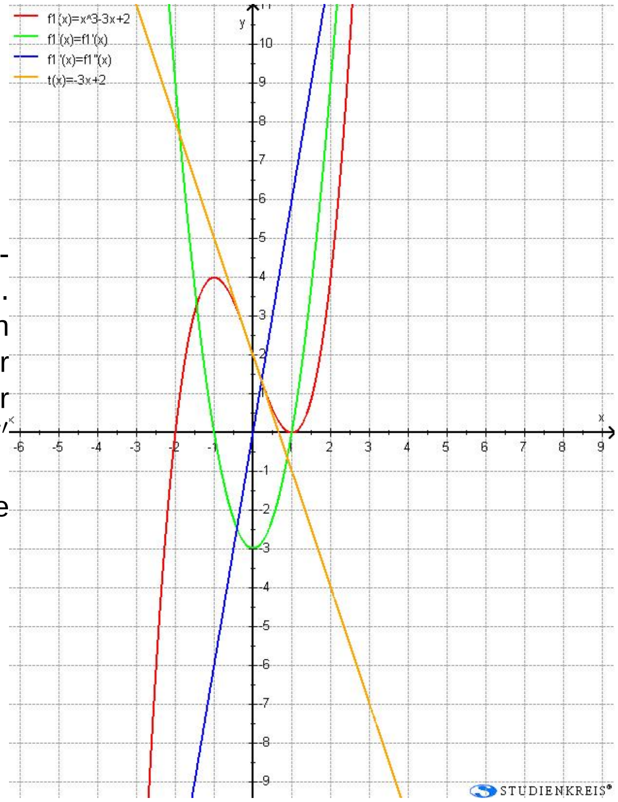
2.2 Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x)$

Es gilt $f' = 0$, also lösen wir die Gleichung $3x_E^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_E = \pm 1$. Da $f'' = 6x$ liegen offenbar Extrema vor, denn $f''(\pm 1) = \pm 6 \neq 0$.
$x_{E1} = 1 \Rightarrow f''(1) = 6 > 0$ ☺, $f(1) = 0$ (siehe oben), also Tiefpunkt $T(1|0)$.
$x_{E2} = -1 \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$ ☹, $f(-1) = -1+3+2 = 4$ (siehe oben), also Hochpunkt $T(-1|4)$.

2.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente

Es gilt $f'' = 0$, also lösen wir die Gleichung $6x_W = 0 \Rightarrow x_W = 0$. Da $f''' = 6 \neq 0$ liegt ein Wendepunkt vor: $W(0|2)$. Für die Steigung der Wendetangente gilt $m = f'(0) = -3$. Dies einsetzen in die Gleichung für die y-Koordinate des Wendepunktes ergibt: $-3 \cdot 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$. Die Funktionsgleichung der Wendetangente lautet offenbar $t(x) = -3x + 2$

2.4 Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $I = [-2{,}5; 2{,}5]$



Schließlich die Skizze der Funktion, in der die besonderen Punkte hier nicht eingezeichnet sind. Dafür sind aber 1. und 2. Ableitung zusätzlich mit eingezeichnet, und wegen der Nullstellen der Ableitungen, lassen sich somit alle Punkte klar erkennen (denn diese sind Nullstellen von f, f' und f'' ; siehe Abbildung rechts ->).
Außerdem ist die gewünschte Wendetangente $t(x)$ in der Farbe orange mit eingezeichnet.

3 Aufleiten

Ihnen sind die Ableitungsregeln zum Ableiten von Polynomfunktionen bekannt. So können Sie z.B. zur Funktion $f(x) = x^5$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = 5 \cdot x^4$ bestimmen. Im folgenden sind die Ableitungsfunktionen gegeben und sie sollen **umgekehrt** von der Ableitungsfunktion auf eine mögliche Ausgangsfunktion zur Ableitungsfunktion zurück schließen, im Beispiel von $f'(x) = 5 \cdot x^4$ auf die mögliche Ausgangsfunktion $f(x) = x^5$. Sie sollen also nicht ableiten, sondern hierzu rückwärts aufleiten:

3.1 Ableitungsfunktion $f'(x) = 4x^3 - 2x^2$

$\Rightarrow$ Ausgangsfunktion $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3$

3.2 Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x$

$\Rightarrow$ Ausgangsfunktion $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - x^2$

3.3 Geben Sie zur Ableitungsregel (Potenzregel) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ eine umkehrende Aufleitungsregel an: $f'(x) = x^m$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$.