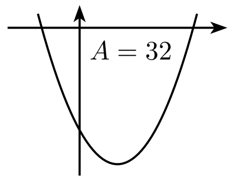
1 Musterlösung Steckbrief und Integral

Hier ist meine Musterlösung der Klausur vom 26.03.2009.

1.1 Aufgabe: Steckbrief mit Integral

Eine nach oben offene Parabel schneidet die x-Achse bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 3$ und schließt mit der x-Achse die Fläche $A = 32$ ein.



a) Geben Sie für eine allgemeine quadratische Funktion sowohl die allgemeine Stammfunktion $F(x)$ als auch die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ an. [3]
Lösungshinweise: Mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist dieser Aufgabenteil trivial: $F(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$, $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a \neq 0$ für $a \neq 0$, also quasi 3 Bewertungs-Punkte geschenkt.
b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der o.g. Parabel. [4]
Lösungshinweise: Hier gibt es 2 Ansatzmöglichkeiten:
i) Mit dem Standard-Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ führt das Einsetzen der beiden Schnittpunkte mit der x-Achse auf die beiden Gleichungen

$$0 = f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c \tag{I}$$
$$0 = f(3) = a \cdot (3)^2 + b \cdot (3) + c = 9a + 3b + c \tag{II}$$

Kombinieren dieser beiden Gleichungen führt zu II−I $\Rightarrow 8a - 4b = 0 \Rightarrow b = -2a$
und II+3I $\Rightarrow 12a - 4c = 0 \Rightarrow c = -3a$
$\Rightarrow f(x) = ax^2 - 2ax - 3a$
Die Unbekannte a folgt aus der Bedingung für die Fläche $A = 32$.
ii) Da man verstanden hat, dass $x_{1,2}$ Nullstellen der Funktion f sind, kann man dies ausnutzen und als Ansatz wählen: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) = ax^2 - 2ax - 3a$
Die verbliebene Unbekannte a bestimmt man nun aus der Bedingung für die Fläche $A = 32$.
Die Fläche A liegt unterhalb der x-Achse, also gilt $-32 = \int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx$. Setzen wir die Stammfunktion $F(x)$ ein, so folgt: $-32 = \left[\frac{a}{3}x^3 - ax^2 - 3ax\right]_{-1}^{3} = -9a - 1\frac{2}{3}a = -\frac{32}{3}a \mid \cdot(-\frac{3}{32})$
$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow c = -9 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 6x - 9.$

1.2 Aufgabe: Steckbrief

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die folgende Eigenschaften hat: Sie hat eine Nullstelle $x_N = 0$, ein lokales Minimum in $T(3 \mid -4\frac{1}{2})$ und eine Wendestelle bei $x_w = 1\frac{2}{3}$. [10]
Lösungshinweise: Mit dem Standard-Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ folgt aus der Nullstelle $x_N = 0$, dass $d = 0$ gilt. Der Tiefpunkt führt zu zwei Gleichungen:

$$-4\frac{1}{2} = f(3) = a \cdot (3)^3 + b \cdot (3)^2 + c \cdot 3 = 27a + 9b + 3c \tag{I}$$
$$0 = f'(3) = 3a \cdot (3)^2 + 2b \cdot (3) + c = 27a + 6b + c \tag{II}$$

Die Wendestelle führt zur dritten Gleichung $f''(1\frac{2}{3}) = 6a \cdot 1\frac{2}{3} + 2b = 0$ (III), d.h. $b = -5a$.
Kombinieren dieser drei Gleichungen führt zu II$-\frac{1}{3}$I $-$ 3III $\Rightarrow 3a = 1{,}5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
Einsetzen von a in III ergibt $b = -\frac{5}{2} = -2{,}5$ und zusammen dann z.B. in II eingesetzt ergibt $c = 1{,}5$. Die gesuchte Funktion lautet also $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2{,}5x^2 + 1{,}5x$.

1.3 Aufgabe: Bestimmung von Geradengleichungen

Der in der Klausur abgebildete Brückenbogen soll ohne Knick in ein geradliniges Fundament übergehen. Wie lauten die Gleichungen der beiden gezeichneten Fundamentgeraden? [9]
Lösungshinweise: Die in der Klausur abgebildete Parabel hat den Scheitelpunkt bei $S(0|4)$ und eine Nullstelle bei $x_2 = 2$.
Mit YAS haben wir den Ansatz $f(x) = ax^2 + c$. Einsetzen des Scheitelpunktes führt zu $c = 4$. Einsetzen der Nullstelle führt zu $0 = a \cdot (2)^2 + 4 \Rightarrow a = -1$. Also lautet die Funktionsgleichung der Parabel $f(x) = -x^2 + 4$. Gesucht sind die beiden Fundamentgeraden, die direkt an den Nullstellen (Schnittpunkten mit der x-Achse) anschließen. Die Steigung der Fundamentgeraden ist mit der Steigung der Parabelfunktion in den Berührpunkten gleich, es gilt also $m_1 = f'(x_1) = f'(-2) = -2 \cdot (-2) = 4$ und $m_2 = f'(x_2) = f'(2) = -2 \cdot (2) = -4$. Natürlich sind auch die Funktionswerte gleich, also gilt $g_1(-2) = 4 \cdot (-2) + b_1 = f(-2) = 0 \Rightarrow b_1 = 8$ und $g_2(2) = -4 \cdot (2) + b_2 = f(2) = 0 \Rightarrow b_2 = 8$. Die Gleichungen der Fundamentgeraden lauten entsprechend $g_1(x) = 4 \cdot x + 8$ und $g_2(x) = -4 \cdot x + 8$.

1.4 Aufgabe: Bestimmung einer Fläche

Berechnen Sie die Fläche der in der Klausur abgebildeten Figur am besten als Differenz einer Rechteckfläche und einer Parabelfläche. [10]
Lösungshinweise: Die Unterseite der Figur ist wiederum eine Parabel, mit Scheitelpunkt bei $S(0|20)$ und eine Nullstelle bei $x_2 = 40$.
Mit YAS haben wir den Ansatz $f(x) = ax^2 + c$. Einsetzen des Scheitelpunktes führt zu $c = 20$. Einsetzen der Nullstelle führt zu $0 = a \cdot (40)^2 + 20 \Rightarrow a = -\frac{1}{80}$. Also lautet die Funktionsgleichung der Parabel $f(x) = -\frac{1}{80}x^2 + 20$. Die Stammfunktion ist $F(x) = -\frac{1}{240}x^3 + 20x + C$. Wegen YAS ist also die Parabelfläche $A_P = 2 \cdot \int\limits_0^{40} f(x)\,dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{240}x^3 + 20x\right]_0^{40} = \frac{3200}{3} = 1066\frac{2}{3}$. Diese wird von der Rechteckfläche $A_R = 40 \cdot 80 = 3200$ abgezogen: $A = A_R - A_P = 3200 - 1066\frac{2}{3} = \frac{6400}{3} = 2133\frac{1}{3}$. Die gesuchte Fläche beträgt rund 2133 Quadratmeter.

Das war's und fertig.