

**FOS — MUSTERLÖSUNG**

Test — Kurvendiskussion und Flächenberechnung

Datum

21. Januar 2009

**1 Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion**

$$f(x) = (x + 1)^3.$$

Am schnellsten wendet man hier die Kettenregel an, mit  $\square = \boxed{x+1}$ :  $f'(x) = g'(\square) \cdot (\square)'(x) = 3 \cdot (x+1)^2 \cdot 1 = 3 \cdot (x+1)^2 = 3x^2 + 6x + 3$ .  $f''(x) = g''(\square) \cdot (\square)'(x) = 2 \cdot 3 \cdot (x+1)^1 \cdot 1 = 6 \cdot (x+1)^1 = 6x + 6$ . Für die 2. Ableitung hätte man statt der Kettenregel auch mittels Binomi direkt summandenweise ableiten können. In jedem Fall lautet das Ergebnis:  $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$  und  $f''(x) = 6x + 6$ .

**2 Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (4 - 8x) \cdot e^{2x}$ .****2.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.**

Der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse liegt an der Stelle  $x_y = 0$ ; einsetzen führt zum Schnittpunkt  $Y(0|4)$ , da  $y(0) = (4 - 8 \cdot 0) \cdot e^0 = 4$ . Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse nennt man gewöhnlich Nullstellen. Sie sind Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$ . Da ein Exponentialterm  $e^x$  nie Null wird, sind die Nullstellen Lösungen der folgenden Gleichung des anderen Faktors  $(4 - 8x_N) = 0$  (EPiNweFNi). Also ist  $x_N = \frac{1}{2}$  die einzige Nullstelle von  $f(x)$  und  $N(\frac{1}{2}|0)$  ist der Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse.

**2.2 Bestimmen Sie etwaige Extrempunkte.**

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist  $f'(x_E) = 0$ . Die erste Ableitung bilden wir nach der Produktregel:  $f'(x) = u'v + uv' = -8e^{2x} + (4 - 8x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = -16 \cdot x \cdot e^{2x}$ . Da ein Exponentialterm  $e^x$  nie Null wird, sind die Nullstellen Lösungen der folgenden Gleichung des anderen Faktors  $-16 \cdot x_E = 0$ . Für  $x_E = 0$  ist die Gleichung erfüllt. Hinreichend für ein Maximum wäre  $f''(x_E) < 0$ . Die zweite Ableitung bilden wir nach der Produktregel:  $f''(x) = u'v + uv' = -16e^{2x} + (-16x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = -16(2x + 1) \cdot e^{2x}$ . Einsetzen von  $x_E = 0$  ergibt  $f''(0) = -16 < 0$ , es liegt also tatsächlich ein Maximum vor  $H(0|4)$ . Den  $y$ -Wert des Maximums hatten wir zuvor berechnet, da  $H = Y$ .

**2.3 Bestimmen Sie etwaige Wendepunkte.**

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist  $f''(x_W) = 0$ . Die zweite Ableitung hatten wir zuvor gebildet:  $f''(x) = u'v + uv' = -16e^{2x} + (-16x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = -16(2x + 1) \cdot e^{2x}$ . Da ein Exponentialterm  $e^x$  nie Null wird, sind die Nullstellen Lösungen der folgenden Gleichung des anderen Faktors  $(2x_W + 1) = 0$  (EPiNweFNi). Also ist  $x_W = -\frac{1}{2}$  mögliche Wendestelle. Hinreichend für den Wendepunkt ist, dass  $f'''(x_W) \neq 0$ . Die dritte Ableitung bilden wir nach der Produktregel:  $f'''(x) = u'v + uv' = -32e^{2x} - 16(2x + 1) \cdot 2 \cdot e^{2x} = -64(x + 1) \cdot e^{2x}$ . Einsetzen von  $x_W = -\frac{1}{2}$  ergibt  $f'''(x_W) = -64(\frac{1}{2})e^{-1} = \frac{-32}{e} \neq 0$ , es liegt also tatsächlich ein Wendepunkt

vor,  $W(0|\frac{8}{e})$ . Den  $y$ -Wert des Wendepunktes berechnen wir durch Einsetzen von  $x_W$  in  $f(x)$ :  $f(x_W) = (4 - 8 \cdot (-\frac{1}{2})) \cdot e^{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = (4 + 4) \cdot e^{-1} = \frac{8}{e} \approx 2,94$ . Für die Zeichnung nehmen wir also  $W(-\frac{1}{2}|2,94)$ .

**2.4 Zeigen Sie, dass  $F(x) = (1 - x) \cdot 4e^{2x}$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist.**

Damit  $F(x)$  eine Stammfunktion ist, reicht es zu zeigen, dass gilt  $F'(x) = f(x)$ . Die erste Ableitung bilden wir nach der Produktregel:  $F'(x) = u'v + uv' = -4e^{2x} + (4 - 4x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = (4 - 8x) \cdot e^{2x} = f(x)$ . Also ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ .

**2.5 Berechnen Sie die Schnittfläche von  $f(x)$  mit  $g(x) = 4 - 8x$ .**

Damit sich eine Schnittfläche ergibt, muss es mindestens zwei Schnittpunkte von  $f(x)$  und  $g(x)$  geben:  $f(x) = g(x)$ .  $g(x) = 4 - 8x$  ist nichts anderes als ein Faktor von  $f(x)$ , d.h. beide Funktionen haben die gleiche Nullstelle  $x_N = \frac{1}{2}$ , der andere Faktor ist  $e^{2x}$ , der immer größer als 1 ist, solange  $x > 0$ . Für  $x = 0$  haben beide Funktionen ebenfalls den gleichen Wert  $y = 4$ . Also liegt die Schnittfläche zwischen den Schnittpunkten  $Y$  und  $N$ , und  $f(x)$  ist größer als  $g(x)$ . Damit ist die Schnittfläche

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) - g(x) dx = F(\frac{1}{2}) - G(\frac{1}{2}) - F(0) + G(0)$$

wobei  $F(x)$  aus dem vorhergehenden Abschnitt bereits bekannt ist, und  $G(x) = 4x + 4x^2 + C$  sich schnell errechnet. Einsetzen in die Stammfunktionen ergibt die Fläche  $A = 4(1 - \frac{1}{2})e^1 - (2 - 1) - (4(1 - 0)e^0 - (0 - 0)) = 2 \cdot e - 5 \approx 0,44$ . Die gesuchte Schnittfläche hat also näherungsweise 0,44 Flächeneinheiten.

**2.6 Funktionsskizzen von  $f(x)$**

