Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153

S.149

6a) Wichtig! Kenntnisse in Potenz- und Wurzelgesetzen auffrischen!

1. Schritt: *f(x)* mit Hilfe von Potenz- und Wurzelgesetzen umformen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$$

2. Schritt: Mit Potenzregel (Total Normal!) ableiten!

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{(-2/3-1)} = -\frac{2}{3}x^{-5/3}$$

3. Schritt: laut Aufgabenstellung soll *f'(x)* in Wurzelschreibweise angegeben werden, also Rückumwandlung (wieder mit Potenz- und Wurzelgesetzen)

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3x^{5/3}}$$

$$\underline{f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}}$$

7a) $f(x) = 3x^3$ $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = 9x^2$

Tangentensteigung in P beträgt: $f'(2) = 9\cdot 2^2 = 36$

allgemeine Geradengleichung als Ansatz für die Tangente:

$t(x) = mx + b$

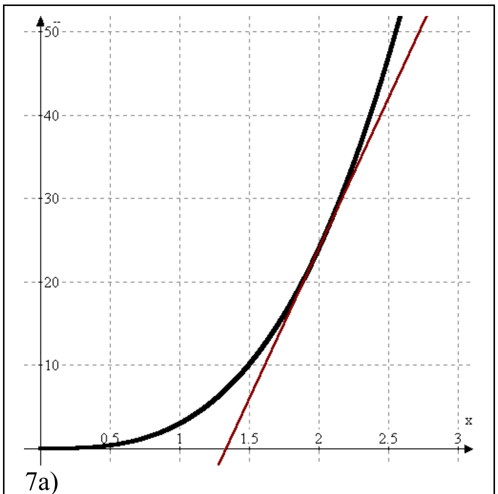
mit $m=f'(2)=36$

mit Punkt $P(2|24)$ und m eingesetzt folgt b:

$24 = 36\cdot 2 + b$ |-72

$b = -48$

$\Rightarrow$ $\underline{t(x) = 36x - 48}$



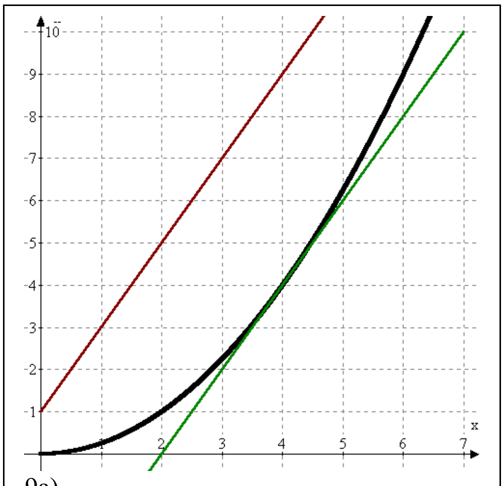
7a)

8a) $f(x) = 0{,}5\cdot x^2$ $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = x$

An welcher Stelle x gilt $f'(x) = 7$?

$\Rightarrow$ $f'(7)$ gleich 7 setzen: $x = 7$

Es ergibt sich sofort die Lösung: An der Stelle x_a=7 beträgt die Steigung 7 !



9a)

9a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x$

Gerade $g(x) = 2x + 1$ hat die Steigung 2, also muss $f'(x) = 2$ sein! $\frac{1}{2}\cdot x = 2$ $\Rightarrow x = 4$ *f(x)* verläuft an der Stelle 4 parallel zur Geraden *g* (siehe nebenstehende Skizze)!

Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153

S. 152f

1a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 7$ $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

2a) $f(x) = 2x^4 - 3x + 1$ $\Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 3$

3a) $f(x) = (x+1)(x-3)$

Produkte können nicht mit der Potenzregel abgeleitet werden, daher vorher umformen (Klammer ausmultiplizieren) oder die Produktregel benutzen

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = 2x - 2$

4a) (wieder umformen mit Potenz-/ Wurzelgesetzen!)

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x} = x^2 + x^{1/2}$$

$\Rightarrow$ Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2x^{1/2}}$$

$$\underline{f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

5a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Stelle 1: $f'(1) = 3\cdot1^2 + 2\cdot1 - 1 \underline{= 4}$

Stelle -1: $f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) - 1 \underline{= 0}$

6a) bekannt: $f(x) = 2x^4 - 3x + 1$ $\Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 3$

Schnittpunkt mit y-Achse: Bedingung $x=0 \Rightarrow$ Gesucht ist $f'(0)$!

$f'(0) = 8\cdot0^3 - 3 \underline{= -3}$

7a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$

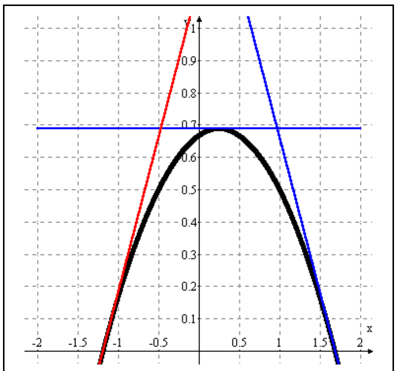
Wo ist $f'(x) = 0$, also gesucht Lösungen der Gleichung:

$$0 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

An der Stelle 1/4 beträgt die Steigung Null!



7a)

Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153

b) Man könnte den Scheitelpunkt wie bisher bestimmen (Scheitelpunktform oder Nullstellen, Mittelwert davon...)
Aber dort muss ja die Steigung von Null vorliegen, d.h. wir haben mit x=1/4 bereits den x-Wert des Scheitelpunktes. Zu berechnen bleibt noch der Funktionswert:

$$f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3} = -\frac{1}{48}+\frac{2}{48}+\frac{32}{48} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16} \quad \Rightarrow \boxed{S(\frac{1}{4}/\frac{11}{16})}$$

c) Schnittstellen von f mit der x-Achse: Bedingung $f(x)=0$

$$0 = -\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$$

$$x^2-\frac{1}{2}x-2 = 0$$

$$p-q-F:$$

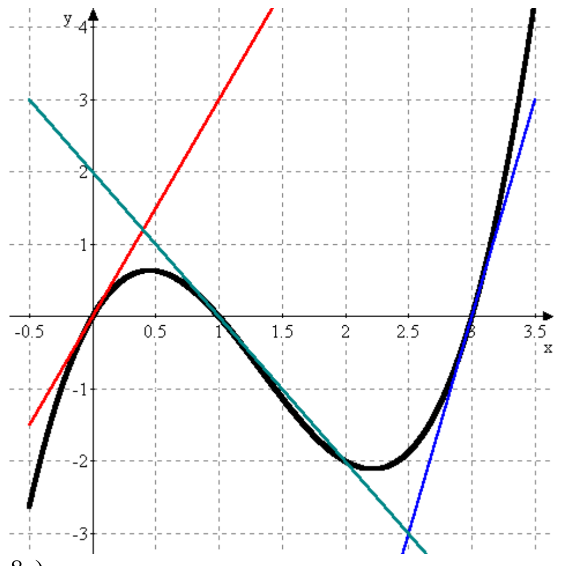
$$x_{1,2} = \frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+2}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 1{,}69 \vee x_2 = -1{,}19$$

Steigung an diesen Stellen:
<u>*f´(1,69)* ca. *-0,96*</u>
<u>*f´(-1,19)* ca. *0,96*</u>

8) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
Schnittpunkt mit x-Achse: Bedingung $f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = x^3 - 4x^2 + 3x$
$\Leftrightarrow \quad 0 = x(x^2 - 4x + 3)$
$\Rightarrow \quad \underline{x_1=0} \quad \vee \quad x^2 - 4x + 3=0$
p-q-Formel:
$\Rightarrow x_{2,3}= 2 \pm 1$
$\Rightarrow \underline{x_2 = 3}; \quad \underline{x_3=1}$



Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind somit:
<u>N₁(0|0), N₂(3|0), N₃(1|0)</u>

Ableitungsfunktion: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
Steigung in den 3 Nullstellen:
$x_1=0 \quad \Rightarrow f'(0) = 3$
$x_2 = 3 \quad \Rightarrow f'(3) = 3\cdot 3^2-8\cdot 3+3 = 6$
$x_3=1 \quad \Rightarrow f'(1) = 3\cdot 1^2-8\cdot 1+3 = -2$

allgemein gilt für die Tangenten (Geradengleichung): $t(x) = mx + b$
Setzt man jeweils den bekannten Punkt N und die Steigung (f'an dieser Stelle) ein, so folgt:

für $x_1=0$ $\quad \Rightarrow 0 = 3\cdot 0 + b \quad \Rightarrow b = 0 \quad \Rightarrow \underline{t_1(x) = 3x}$
für $x_2 = 3$ $\quad \Rightarrow 0 = 6\cdot 3 + b \quad \Rightarrow b = -18 \quad \Rightarrow \underline{t_2(x) = 6x -18}$
für $x_3=1$ $\quad \Rightarrow 0 = -2\cdot 1 + b \quad \Rightarrow b = 2 \quad \Rightarrow \underline{t_3(x) = -2x + 2}$

Auswahl einiger Lösungen der Übungsaufgaben "Schilling", S. 149 – 153

9) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

Da f in Scheitelpunktform vorliegt, ist Scheitelpunkt bekannt: S(3|2)

Vor dem Anwenden der Potenzregel muss $f(x)$ umgeformt werden oder Kettenregel benutzt werden:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$

Ableitungsfunktion:
$f'(x) = x - 3$

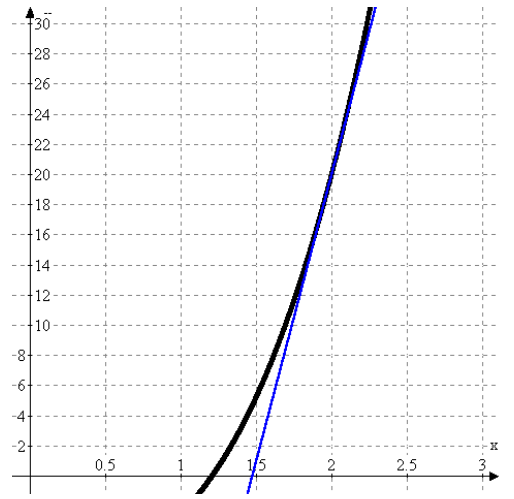
zu zeigen ist, dass $f'(3) = 0$ (denn $x = 3$ ist x-Koordinate des Scheitelpunktes, s.o.)
$\Rightarrow f'(3) = 3 - 3 = 0$ **q**uod **e**rat **d**emonstrandum (was zu beweisen war)

10) $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6$

$\Rightarrow$ Ableitungsfunktion: $f'(x) = 9x^2 + x$
Steigung der Tangente, also Steigung von f an der Stelle 2:
$m = f'(2) = 9 \cdot 2^2 + 2 = 38$

Funktionswert an dieser Stelle:
$f(2) = 3 \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 6 = 20$

Für die Tangente gilt die allgemeine Geradengleichung
$t(x) = mx + b$
Setzt man $m=38$ und den Punkt (2|20) ein, so folgt:
$20 = 38 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow b = -56$
$\Rightarrow t(x) = 38x - 56$ (siehe nebenstehende Skizze)



10)