Umkehrung und Umkehrfunktion	*Datum*
Das Vertauschen von x und y	*15. Januar 2009*

1 Operation und Umkehr-Operation

Bei einer Funktion $y = f(x)$ werden bestimmte Operationen auf x angewandt, so dass zu jedem x aus der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ein y zugeordnet wird. Die Umkehrfunktion $x = i(y)$ würde unter bestimmten Voraussetzungen aus dem y wieder genau ein x bestimmen.

Die Umkehr-Operation hebt die Wirkung der Operation auf, wenn wie im unteren Beispiel die Operation „verdoppeln" durchgeführt wurde, so hebt die Umkehr-Operation „halbieren" die Wirkung der Operation wieder auf, und man gelangt wieder zum ursprünglichen x.
Beispiele:

Operation	Beispiel	Umkehroperation	Beispiel
addieren	$y = x + 2$	subtrahieren	$x = y - 2$
multiplizieren	$y = x \cdot 2$	teilen (dividieren)	$x = y : 2$
quadrieren	$y = x^2$	Wurzel ziehen (radizieren)	$x = +\sqrt{y}$
potenzieren	$y = x^n$	n. Wurzel ziehen	$x = +\sqrt[n]{y}$
exponieren	$y = e^x$	logarithmieren	$x = \ln y$

Allgemein kommt man zur Umkehr-Operation indem man x und y vertauscht, und dann die Gleichung wieder nach x umstellt. Schauen wir uns dies am Beispiel des potenzierens noch einmal genauer an: Wenn $f(x)$ die Funktion ist, die zu jedem x die n. Potenz von x bildet, so lautet die Funktionsgleichung mit der Operation „potenzieren":

1. $f(x) = x^n$, hierbei interpretieren wir $y = f(x)$ und schreiben erneut:
2. $y = x^n$, nun kommt der wesentliche Schritt der Umkehrung, nämlich das Vertauschen x mit y:
3. $x = y^n$, diese Art der Funktionsgleichung gilt natürlich **nicht** mehr für die Ursprungsfunktion $f(x)$, sondern jetzt für die Umkehrfunktion $i(x)$ von $f(x)$
4. $+\sqrt[n]{x} = y$ ergibt sich durch das n. Wurzelziehen (Radizieren) der getauschten Gleichung
5. $i(x) = +\sqrt[n]{x}$ wäre also die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

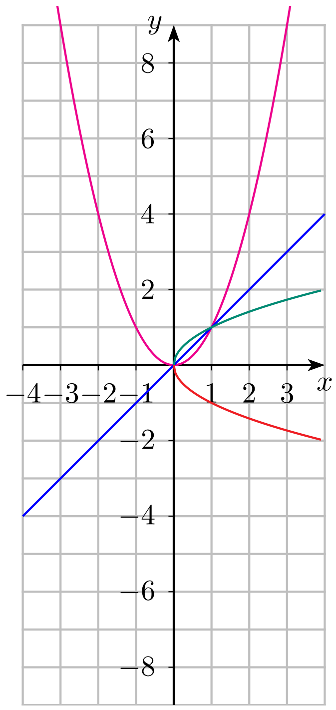
Wir wissen hierbei, dass bei geraden Exponenten, z.B. $n = 2$ (quadrieren), auch negative Argumente prinzipiell zu beachten sind. Damit eine Umkehrfunktion aber eine Funktion ist, d.h. eindeutige Funktionswerte liefert, müssen wir die Wertemenge der Umkehrfunktion künstlich einschränken. Ein Beispiel $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2$ liefert nach x aufgelöst: $x = \pm\sqrt{y}$, d.h. zu jedem y gibt es **zwei** x. Wenn wir nun für die Umkehrfunktion x und y vertauschen, hätten wir eigentlich $y = \pm\sqrt{x}$, was wegen dem $\pm$ aber **keine** Funktion wäre. Also wird es eine Funktion, wenn wir nur noch positive Werte zulassen: $i(x) = +\sqrt{x}$.

2 Umkehrfunktionen

Liegt eine Umkehrfunktion $i(x)$ vor, kann man ihren Graphen graphisch auch durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ des Graphen des Ursprungsgraphen $f(x)$ ermitteln.

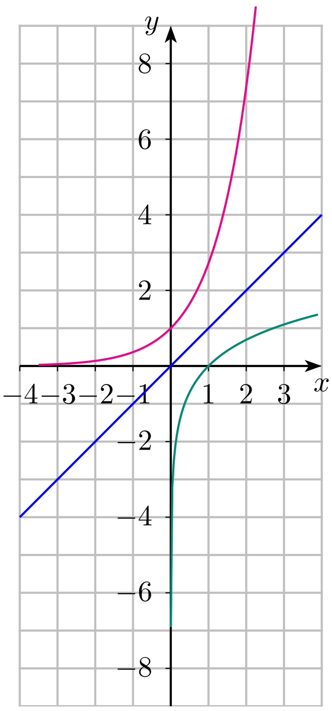
2.1 Beispiel: $f(x) = x^2$

1. Zeichne den Graphen der Funktion, z.B, $y = x^2$
2. Zeichne den Graphen der Winkelhalbierenden $y = x$
3. Führe eine Achsenspiegelung an dieser Winkelhalbierenden durch (z.B. durch geschicktes Knicken des Papieres, mit Spiegel, oder durch genaues Abmessen mit dem Geodreieck) und zeichne so die Umkehrfunktion $i(x)$. Für die Umkehrfunktion ist nur der positive Wurzelast zu gebrauchen, damit es sich um eine eindeutige Funktion handelt.



Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang der Graphen. Die Ausgangsfunktion $f(x) = x^2$ ist in der Farbe Magenta gezeichnet. Dann erkennt man die blaue Winkelhalbierende $y = x$. Und schließlich sind die beiden Wurzeläste dargestellt, die sich aus der Spiegelung von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden ergeben. Hiervon benutzen wir nur den oberen grünen Wurzelast $i(x) = +\sqrt{x}$, damit $i(x)$ auch tatsächlich eine Funktion ist, die jedem x eindeutig auch nur **ein** y zuordnet. Den roten unteren Wurzelast $-\sqrt{x}$, den wir auch aus der Spiegelung von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden erhalten würden, beachten wir nicht; er ist als Teil der Funktion verboten.

2.2 Weiteres Beispiel mit der Exponentialfunktion



Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang der Graphen. Die Ausgangsfunktion $f(x) = e^x$ ist in der Farbe Magenta gezeichnet. Die Exponentialfunktion nimmt ihr Argument x als Exponenten (Hochzahl). Dann erkennt man die blaue Winkelhalbierende $y = x$. Und schließlich ist die grüne Umkehrfunktion $i(x) = +\ln x$ dargestellt, die nur für positive $x > 0$ definiert ist. ln steht für Logarithmus naturalis, also sogenannter natürlicher Logarithmus. Er ist als Umkehrung der Exponentialfunktion notwendig. Eine Gleichung z.B. $e^x = 10$ kann nur mithilfe des Logarithmus naturalis nach x aufgelöst werden: $e^x = 10 \quad |\ln \qquad \Rightarrow \qquad \ln(e^x) = \ln 10 \quad \Rightarrow$ $x = \ln 10 \approx 2{,}302585092994045684017991454684 4$.

Weitere Übungen zum Logarithmus finden sich z.B. unter:
http://www.warncke-family.de/fos/wachstum_brunnen.pdf
und ausführlich zum Bearbeiten über die Osterferien
http://www.warncke-family.de/fos/wachstum_ostern.pdf.

URL dieses Dokumentes ist http://www.warncke-family.de/fos/umkehrfunktion.pdf.