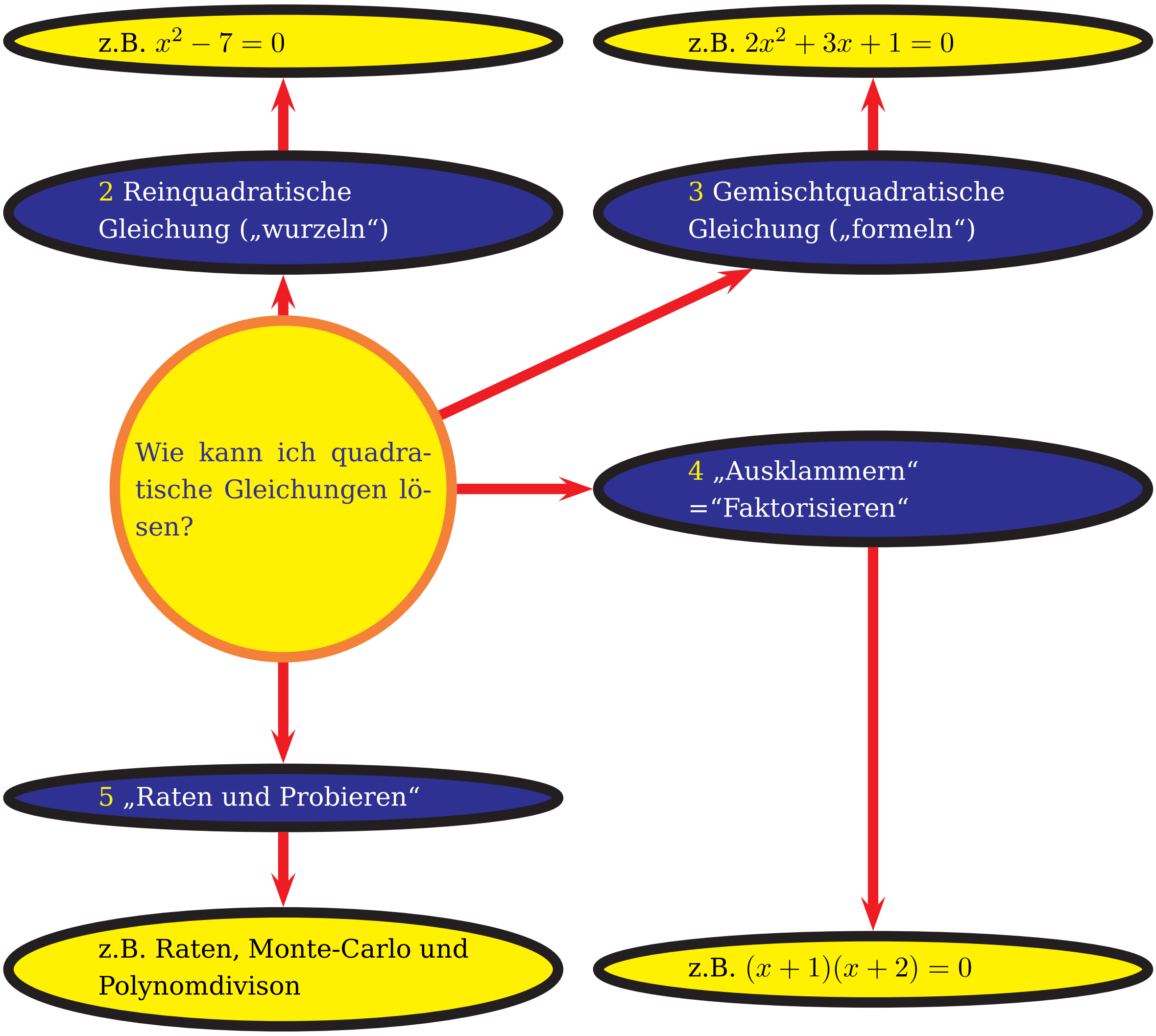
1 Nullstellen quadratischer Funktionen

Dies ist die quadratische Funktion in Allgemeiner Form (AF): $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit a,b,c,x,$f \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Nullstellen sind diejenigen x, für die f Null wird: $f = 0$. Also findet man die Nullstellen, indem man die quadratische Gleichung $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ löst. Wie löst man eine quadratische Gleichung[1]?



[1] Die blauen Ovale sind mit den entsprechenden Abschnitten verlinkt, die die jeweilige Methode erläutern

2 „Wurzeln“ zum Lösen der reinquadratischen Gleichung

Die reinquadratische Gleichung hat die Form $a \cdot x^2 + c = 0$, d.h. es fehlt der lineare Term bx. Diese Gleichung lösen wir durch „Wurzeln“, d.h. nach maximal ein, zwei Umformungen ziehen wir die Wurzel und haben die Lösung(en):

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + c && |:a \\ 0 &= x^2 + q && |-q \\ -q &= x^2 && |\sqrt{} \\ \pm\sqrt{-q} &= x \end{aligned} \qquad \text{z.B.:} \qquad \begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 9 && |:3 \\ 0 &= x^2 - 3 && |+3 \\ 3 &= x^2 && |\sqrt{} \\ \pm\sqrt{3} &= x \end{aligned}$$

W i c h t i g : Wurzelziehen ist mit dem Plus-Minus ($\pm$) gekoppelt! Wenn $q < 0$ ist, wie im obigen Beispiel $x^2 = 3$, wird es also immer **zwei** Lösungen geben ($x_1 = +\sqrt{3}$ **und** $x_2 = -\sqrt{3}$) $\mathbb{L} = \{x_1; x_2\}$! Aus einer negativen Zahl kann man keine reelle Wurzel bekommen: wenn $q > 0$ ist, wie im Beispiel $x^2 = -3$, wird es also gar keine Lösung geben, d.h. $\mathbb{L} = \{\}$! Der Spezialfall ist $ax^2 = 0$, dann gibt es nur die eine Lösung $x = 0$, $\mathbb{L} = \{0\}$.

3 „Formeln“ zum Lösen der gemischtquadratischen Gleichung

Man kann jede quadratische Gleichung mit einer Formel angehen, auch die reinquadratische Gleichung. Am einfachsten ist die pq-Formel, die ich genau deswegen favorisiere. Die pq-Formel **darf** aber nur verwendet werden, wenn die quadratische Gleichung **normiert** ist, d.h. der Zahlenfaktor vor dem x^2 muss 1 sein. Das Normieren ist ein schneller Schritt, man muss jeden einzelnen Term durch a teilen und schon hat man die normierte Form der Gleichung, die sogenannte Normalform (NF) der Gleichung: $0 = x^2 + px + q$. Falls die **abc-Formel** oder die **pq-Formel** nicht gegeben ist, so kann man sie sich auch mit der quadratischen Ergänzung (**qE**) selbst herleiten:

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx && +c && \text{AF } |:a \\ 0 &= x^2 + px && +q && \text{NF} \\ &= \underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 && +q && \text{qE} \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && \underbrace{-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} && D \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && -D && |+D \\ D &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && && |\sqrt{} \\ \pm\sqrt{D} &= x_{1,2} + \frac{p}{2} && && |-\tfrac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} &= x_{1,2} && && \text{(pq-Formel)} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \text{(pq-Formel)}$$

W i c h t i g : p ist der Zahlenfaktor des linearen Gliedes, d.h. in der NF gehört p zu dem Term px. Schüler verwenden gern auch die pq-Formel für die reinquadratische Gleichung. Dann muss man richtig einsetzen und nicht mit q, dem Absolutglied der NF verwechseln. Ein Beispiel für die mögliche, wenn auch wenig sinnvolle Anwendung der pq-Formel bei der reinquadratischen Gleichung mit $a = 2$, $b = p = 0$ und $c = -8$, d.h. $q = -4$

$$\begin{aligned}
0 &= 2x^2 - 8 && \text{AF } |{:}2\\
0 &= x^2 - 4 && \text{NF } |\text{pq}\\
x_{1,2} &= -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 - (-4)} && \text{(pq-Formel)}\\
&= \pm\sqrt{4}\\
&= \pm 2
\end{aligned}$$

Hier sind **zwei** Lösungen ($x_1 = +2$ **und** $x_2 = -2$) $\mathbb{L} = \{x_1; x_2\}$!
Sinnvoller ist die Anwendung der pq-Formel in folgendem Beispiel: $a = -3$, $b = 2$, $c = 6$

$$\begin{aligned}
0 &= -3x^2 + 2x + 6 && \text{AF } |{:}(-3)\\
0 &= x^2 - \frac{2}{3}x - 2 && \text{NF } |\text{pq}\\
x_{1,2} &= -\frac{-1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - (-2)} && \text{(pq-Formel)}\\
&= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + 2}\\
&= \frac{1}{3} \pm \sqrt{2\frac{1}{9}}\\
&\approx 0{,}33 \pm 1{,}45
\end{aligned}$$

Alternativ kann zur Lösung einer solchen Gleichung in AF auch die sogenannte abc-Formel verwendet werden, die geringfügig komplizierter als die pq-Formel ist, und deswegen von mir gemieden wird:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(abc-Formel)}$$

Setzen wir das gleiche Beispiel ein $a = -3$, $b = 2$, $c = 6$:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 6}}{2 \cdot (-3)} \qquad \text{(abc-Formel)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{-6} \\ &= \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{76}}{-6} \\ &\approx 0{,}33 \mp 1{,}45 \end{aligned}$$

erhalten wir mit der abc-Formel letztendlich die gleiche Lösungsmenge wie mit der pq-Formel: $\mathbb{L} = \{\frac{1}{3} - \sqrt{2\frac{1}{9}}; \frac{1}{3} + \sqrt{2\frac{1}{9}}\}$.

4 „Faktorisieren“ bzw. „Ausklammern“ zum Lösen der gemischtquadratischen Gleichung

Fehlt das Absolutglied c bei der quadratischen Gleichung in AF, so haben wir $ax^2 + bx = 0$ und können ein x ausklammern:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Es wäre jetzt unsinnig das x wieder in die Klammer hinein zu multiplizieren, manchmal seh ich aber sowas in Arbeiten ☹. Nein, es ist ein Fortschritt, die quadratische Gleichung nun als ein Produkt aus x und $(ax + b)$ zu schreiben, denn es gibt den Satz vom Nullprodukt:

Ein Produkt ist Null, wenn (mindestens) ein Faktor des Produktes Null wird.
Oder kurz: Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor Null ist. Oder noch kürzer (abgekürzt):
E P i N w e F N I

Also lösen $x = 0$ (1. Faktor) und $(ax + b) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$ (Klammer ist 2. Faktor) die quadratische Gleichung und die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{0; -\frac{b}{a}\}$.
Ein Beispiel: $x^2 + x = 0$, d.h. $a = b = 1$, und $c = 0$. Viele Schüler würden jetzt pq machen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2}$, aber Ausklammern geht noch schneller: $x \cdot (x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 + 1 = 0 \quad | -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$, wir erhalten natürlich die gleiche Lösungsmenge wie mit der pq-Formel: $\mathbb{L} = \{0; -1\}$.

Es gibt sogar Fälle in denen die quadratische Gleichung in Form eines Produktes gegeben ist[2]. Wenn die Gleichung lautet

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

so ist die Lösungsmenge nach EPiNweFni sofort klar: $\mathbb{L} = \{x_1; x_2\}$, denn wenn $x = x_1$ gilt, so ist der erste Linearfaktor (die erste Klammer) Null, und wenn $x = x_2$ gilt, so ist der zweite Linearfaktor (die zweite Klammer) Null, und nach EPiNweFNi ist in beiden Fällen das gesamte Produkt Null, also die Gleichung gelöst.

[2] z.B. wenn der Lehrer Binomische Formeln behandelt.

Ein Beispiel: $(x-1)(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ (nach EPiNweFNi abgelesen), die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{1; -3\}$. Man könnte natürlich auch umständlich ausmultiplizieren und dann mit der pq-Formel lösen ☺.

5 „Raten“ bzw. „Probieren“ zum Lösen der gemischtquadratischen Gleichung

Eine quadratische Gleichung hat maximal 2 x, die die Gleichung lösen, da lohnt sich gelegentlich das Raten ☺. Ein Lehrer sieht das natürlich nicht so gern, weil er diese Lösungsmethode nicht vom Abgucken unterscheiden kann. Tatsächlich ist es aber eine wissenschaftliche Methode, die häufig auf Computern[3] implementiert wird, und so eine schnelle Lösung schafft. Wenn man glaubt, dass ein bestimmtes x_1 die Gleichung löst, dann muss man auf jeden Fall diese Lösung probieren, d.h. man muss die Probe machen, ob x_1 tatsächlich eine Lösung ist.
Ein Beispiel: $x^2 + 3x - 4 = 0$
Hmm, sieht so aus, als könnte $x_1 = 1$ eine Lösung sein. Machen wir die Probe: $1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$. Hurra, eine Lösung ist gefunden, immerhin. Da sich aber $x^2 + 3x - 4$ nicht als Binomische Form $(x-1)(x-1)$ schreiben lässt, muss es noch eine andere Lösung x_2 geben. Tja, da können wir aber lange raten.
Es gibt prinzipiell die Möglichkeit, die andere Lösung mit der sogenannten Polynomdivision heraus zu finden:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 + 3x - 4\big) : \big(x - 1\big) = x + 4 \\
\underline{-\,x^2 \quad + x} \\
\qquad\quad 4x - 4 \\
\qquad \underline{-\,4x + 4} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Wer schriftlich dividieren kann, wird die Polynomdivision schnell verstehen können, allen anderen wird die pq-Formel empfohlen. Jedenfalls ergibt sich aus der Polynomdivision der andere Linearfaktor als $(x+4)$, d.h. es hat sich gezeigt, dass $x^2 + 3x - 4 = (x-1) \cdot (x+4)$ gilt und somit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; -4\}$ lautet.
Wer’s nicht glaubt soll $x = -4$ halt auch noch einmal probieren.

Diese Datei ist http://warnckes.info/fos/quad_null.pdf, weiterführende Informationen zu quadratischen Gleichungen und Funktionen finden sich systematisch in
http://warnckes.info/fos/quad_sys.pdf.

[3] als Anfänger könnte man z.B. für dieses Problem ein Programm schreiben, dass alle ganzen Zahlen zwischen -9 und +9 in die Gleichung für x einsetzt und ausrechnet... - fortgeschrittene Varianten münden z.B. in der Monte-Carlo-Methode