1 Kurvendiskussion mit Exp-Funktionen (nicht ganzrational)

Zu den Routineuntersuchungen einer Kurvendiskussion gehört es, die Ableitungen zu bestimmen, die Schnittpunkte mit den Achsen zu berechnen, die Extrema und Wendepunkte zu bestimmen, sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$ zu untersuchen.

Ein Beispiel:

Führe eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ durch. Skizziere den Graphen von f für $-1 \leq x \leq 3$.

1. Maximaler Definitionsbereich:
$\mathbb{D}_{\max} = \mathbb{R}$, da f ein Produkt aus ganzrationaler mit Exponentialfunktion ist.

2. Symmetrie:
Da f ein Produkt aus x mit Exponentialfunktion ist, ist weder YAS noch 0PS erkennbar.

3. Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse

1. Der Ansatz für die Nullstelle lautet $f(x) = x \cdot e^{1-x} = 0$.

   Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist (EPiNweFNi).

   Da der Exponentialterm e^{1-x} nicht Null werden kann[1], liefert der Faktor x die einzige Nullstelle von f bei $x = 0$. Somit hat man als Nullstelle $N(0|0)$

2. Um den Schnittpunkt mit der y-Achse zu bestimmen setzt man in f den Wert $x = 0$ ein, also erhält man $f(0) = 0 \cdot e^{1-0} = 0 \cdot e^1 = 0$. Damit ist der Schnittpunkt mit der y-Achse der Punkt $S_y(0|0)$.

4. Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Für $x \to \infty$ strebt f gegen 0:

x	1	5	10	$\to \infty$
$f(x)$	1	0,09	0,0012	$\to 0$

Für $x \to -\infty$ strebt f gegen $-\infty$:

x	-1	-5	-10	$\to -\infty$
$f(x)$	-7	$-2 \cdot 10^3$	$-6 \cdot 10^5$	$\to -\infty$

5. Ableitungen:
Die erste Ableitung f' wird mithilfe der Produkt- und Kettenregel gebildet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \cdot e^{1-x})' \\ &= 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= 1 \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} \\ &= (1-x) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

Analog berechnet man f'' und f''':

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-1) \cdot e^{1-x} \\ &\quad +(1-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= (x-2) \cdot e^{1-x} \\ f'''(x) &= 1 \cdot e^{1-x} + (x-2) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= (3-x) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

6. Monotonie: Ist optional und sowieso zu schwer für uns.

7. Extrema:
Es muss die notwendige Bedingung für Extrema $f'(x) = 0$ untersucht werden.
Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad (1-x)e^{1-x} &= 0 \\ \Rightarrow \quad (1-x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 1 &= x \end{aligned}$$

Als nächstes muss untersucht werden, ob es sich bei der potentiellen Extremalstelle $x = 1$ um ein Minimum oder Maximum handelt.
Dazu untersucht man die zweite Ableitung für $x = 1$. Ist diese größer Null ☺, so handelt es sich um ein Minimum. Ist diese kleiner Null ☹, so handelt es sich um ein Maximum.
Es ist

$$\begin{aligned} f''(1) &= (1-2) \cdot e^{1-1} \\ &= -1 \cdot e^0 \\ &= -1 \qquad < \quad 0. \qquad ☹ \end{aligned}$$

Damit handelt es sich um ein Maximum mit Wert $f(1) = 1 \cdot e^{1-1} = 1 \cdot 1 = 1$. Also ist der Punkt $H(1|1)$ ein Hochpunkt.

[1] Für die Exponentialfunktion: Für **alle** $x : e^x > 0$, und $e^{1-x} = e^{-1 \cdot x + 1}$ nach x abgeleitet: $-1 \cdot e^{-1 \cdot x + 1}$

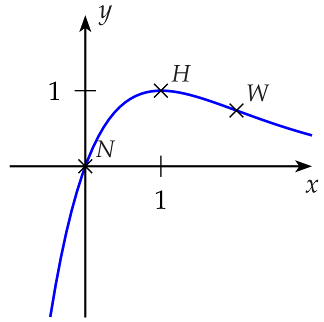
8. Wendepunkte:
Die notwendige Bedingung für Wendestellen ist $f''(x) = 0$, also

$$\begin{array}{rrcl} & f''(x) & = & 0 \\ \Rightarrow & (x-2)\cdot e^{1-x} & = & 0 \\ \Rightarrow & (x-2) & = & 0 \\ \Rightarrow & x & = & 2. \end{array}$$

Der zugehörige Funktionswert lautet $f(2) = 2 \cdot e^{1-2} = \frac{2}{e} \approx 0{,}7358$.
Als nächstes muss die hinreichende Bedingung untersucht werden. Ist $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so ist x eine Wendestelle von f.
Ist $f'''(x) < 0$, so handelt es sich um eine *Links-rechts-Wendestelle*.
Ist $f'''(x) > 0$, so handelt es sich um eine *Rechts-links-Wendestelle*.
Weil

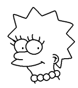
$$\begin{array}{rcl} f'''(2) & = & (3-2)\cdot e^{1-2} \\ & = & 1 \cdot e^{-1} \\ & > & 0 \end{array}$$

ist der Punkt $W(2|0{,}74)$ ein Rechts-links-Wendepunkt.
9. Sonderfall und Wendetangente: fällt weg
10. Graph:



Zweites Beispiel (etwas knapper und nicht mehr vollständig nach dem Standardschema):

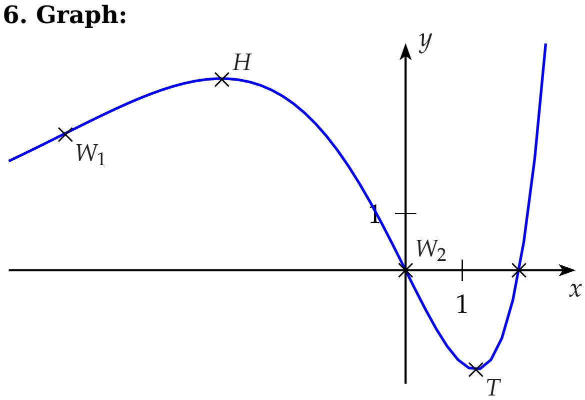
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = (x^2 - 2x)\cdot e^{0{,}5x}$ und skizzieren Sie den Graphen von f für $-7 \leq x \leq 2{,}5$.



1. Ableitungen:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (2x-2)\cdot e^{0{,}5x} \\ & & +(x^2-2x)\cdot(0{,}5\cdot e^{0{,}5x}) \\ & = & (\frac{1}{2}x^2 + x - 2)\cdot e^{0{,}5x} \\ f''(x) & = & (\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x)\cdot e^{0{,}5x} \\ f'''(x) & = & (\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 1{,}5)\cdot e^{0{,}5x} \end{array}$$

2. Nullstellen: Die Funktion besitzt zwei Nullstellen[2], nämlich $x = 0$ und $x = 2$
Die Funktion schneidet die y-Achse in $S_y(0|0)$
3. Extrema:
Die Ableitung f' hat zwei Nullstellen[3], bei $x = -1-\sqrt{5} \approx -3{,}24$ und $x = -1+\sqrt{5} \approx 1{,}24$.
Die Überprüfung mittels f'' ergibt ein Maximum ☹ im ersten Fall und ein Minimum ☺ im zweiten Fall. Setzt man $x = -3{,}24$ und $x = 1{,}24$ in $f(x)$ ein, so erhält man einen Hochpunkt $H(-3{,}24|3{,}36)$ und einen Tiefpunkt $T(1{,}24 \mid -1{,}75)$.
4. Wendepunkte:
Die Nullstellen von f'' liegen bei $x = 0$ und $x = -6$. Nach Überprüfung mithilfe von f''' und nach Berechnung der zugehörigen $y-$Werte erhalten wir $W_1(-6|2{,}39)$ und $W_2(0|0)$.
5. Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Für $x \to -\infty$ strebt $f \to 0$. Für $x \to \infty$ wächst f grenzenlos ($f \to \infty$).
6. Graph:



[2] $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2-2x)\cdot e^{0{,}5x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$
[3] $f'(x) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}x^2 + x - 2)\cdot e^{0{,}5x} = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5} \approx -1 \pm 2{,}24$.