1 Gleichungssysteme aus linearen Gleichungen

Wir haben beim Vergleich von Handy- oder Stromtarifen sowie der Berechnung des Treffpunktes von zwei Fahrzeugen bereits Schnittpunkte von zwei Geraden berechnet. Man sagt auch, man löst ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel genauer:

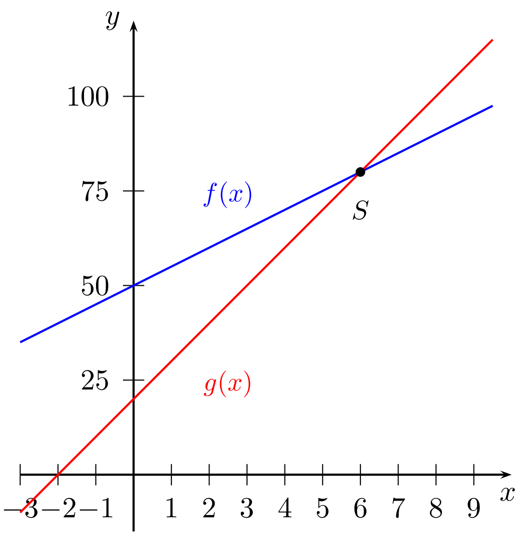
1.1 Clubvergleich

Welchem Tennisclub sollte ich beitreten, wenn der Tennisclub A eine hohe Aufnahmegebühr (z.B. 50 EUR) und einen geringen Stundenpreis (z.B. 5 EUR) und der Tennisclub B eine niedrige Aufnahmegebühr (z.B. 20 EUR) und einen hohen Stundenpreis (z.B. 10 EUR) pro Tennisplatz hat?

Wenn wir das „mathematisieren“, also in eine Gleichung bringen, so ergibt sich (Variablen: Stundenzahl x und Gesamtpreis nach x Stunden ist y)

- für Tennisclub A die Gesamtpreisfunktion $f : y = 5x + 50$,
- für Tennisclub B die Gesamtpreisfunktion $g : y = 10x + 20$.

f und g sind dabei lineare Funktionen von x. Jede der beiden Funktionen beschreibt graphisch eine Gerade (s. Diagramm):



(Beachte: der Übersichtlichkeit halber hat die x-Achse einen anderen Maßstab als die y-Achse.)

Wir stellen fest: die beiden Geraden schneiden sich im Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$. Schnittpunkt bedeutet aber, dass S sowohl auf der Geraden von f als auch auf der Geraden von g liegt. Oder anders gesagt: S ist der einzige Punkt, der
a) sowohl auf der Geraden von $f(x)$
b) als auch auf der Geraden von $g(x)$ liegt.
zu a): wenn $S(x_s|y_s)$ auf der Geraden von f liegt, so bedeutet das, dass die Koordinaten von S die Funktionsgleichung $f : y = 5x + 50$ erfüllen müssen, d.h. $y_s = 5x_s + 50$ (A)
zu b): wenn $S(x_s|y_s)$ auf der Geraden von g liegt, so bedeutet das, dass die Koordinaten von S die Funktionsgleichung $g : y = 10x + 20$ erfüllen müssen, d.h. $y_s = 10x - s + 20$ (B)
Die Gleichungen (A) und (B) müssen gleichzeitig erfüllt sein. Oder wir sagen: wir suchen dasjenige S, das Gleichung (A) und Gleichung (B) erfüllt (es reicht uns also nicht, wenn nur eine

der Gleichungen erfüllt wird, also (A) oder (B)).

$$\begin{aligned} y_s &= 5x_s + 50 \\ y_s &= 10x_s + 20 \end{aligned} \qquad \text{Gleichungssystem mit 2 linearen Gleichungen}$$

Diese zwei Gleichungen nennen wir ein „Gleichungssystem". Wenn wir nun der Vereinfachung halber die Indizes weglassen, schreibt sich unser obiges Gleichungssystem folgendermaßen:

$$\begin{aligned} y &= 5x + 50 \\ y &= 10x + 20 \end{aligned}$$

Die Frage ist nun, wie man daraus das x und das y berechnen kann, die **beide** Gleichungen erfüllen (geometrisch: wie berechnet man die Koordinaten x_s,y_s des Schnittpunkts beider Geraden?). Überlegen wir uns dazu erstmal, was an dem Gleichungssystem bisher so unangenehm ist: doch wohl, dass in jeder Gleichung zwei Unbekannte x,y vorkommen. Wir können aber nur Gleichungen mit einer Unbekannten lösen. Also müssen wir eine der Unbekannten „rausschmeißen", so dass eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten übrig bleibt.

Wir benutzen das Gleichsetzungsverfahren denn links steht jeweils das gleiche y. Wir können also auch schreiben

$$y = 5x + 50 \tag{A}$$
$$y = 10x + 20 \tag{B}$$

1.2 Gleichsetzungsverfahren

Da beide Funktionsgleichungen in der Form $y = m \cdot x + b$ sind, und links jeweils das gleiche y steht, können wir jeweils die rechten Seiten gleich setzen (A)=(B): Damit ergibt sich: $5x+50 = y = 10x + 20$ oder kurz

$$5x + 50 = 10x + 20 \tag{E}$$

wir haben die rechten Seiten (A),(B) des ursprünglichen Gleichungssystems „gleichgesetzt". Mit Gleichung (E) haben wir nun ganz nebenbei schon unser Einheitsziel erreicht, nämlich eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten. Die können wir aber bereits lösen:

$$\begin{aligned} 5x + 50 &= 10x + 20 && | - 5x \\ 5x + 50 - 5x &= 10x + 20 - 5x \\ 50 &= 5x + 20 && | - 20 \\ 50 - 20 &= 5x + 20 - 20 \\ 30 &= 5 \cdot x && | : 5 \\ 30 : 5 &= 5 \cdot x : 5 \\ 6 &= x \end{aligned}$$

Wir wissen also bereits: die x-Koordinate des Schnittpunkts S ist 6, also $S(6|y_s)$. Es war ja geradezu unser Ziel, das y erstmal zu verlieren (um nur noch die eine Unbekannte x zu haben).

Jetzt im Nachhinein müssen wir uns aber daran erinnern, dass dieses y natürlich auch noch zu berechnen ist. Das geht, indem wir $x = 6$ in eine der beiden Anfangsgleichungen (A) oder (B) einsetzen. Es ist egal, in welche der beiden Gleichungen wir einsetzen, denn wir wissen ja, dass x beide Gleichungen gleichermaßen erfüllt. Setzen wir also in (A) $y = 5x + 50$ ein. Wir erhalten $y = 5 \cdot 6 + 50$, also plötzlich eine Gleichung, in der nur noch die eine Unbekannte y vorkommt.

In unserem Fall ergibt sich ganz einfach $y = 5 \cdot 6 + 50 = 30 + 50 = 80$ bzw. die y-Koordinate 80 von S, also $S(6|80)$. Die Lösungsmenge besteht aus diesem einen Punkt und ist daher $\mathbb{L} = \{(6|80)\}$.

1.3 Antwortsatz

Da anfangs eine Textaufgabe stand, müssen wir nun das Ergebnis wieder „entmathematisieren“ und in den Text zurückübersetzen: bei $x = 6$ Stunden beläuft sich bei beiden Vereinen der Gesamtpreis auf $y = 80$ EUR. Aus der Zeichnung ersehen wir außerdem, dass

- bis $x = 6$ Stunden der Graph von g unter dem von f liegt, also Club B günstiger ist,

- bei $x = 6$ Stunden die Graphen von f und g gleich hoch liegen, also beide Clubs gleich günstig sind,

- ab $x = 6$ Stunden der Graph von g über dem von f liegt, also Club A günstiger ist.

Oder kurz: will ich sehr wenig (unter 6 Stunden) spielen, so ist Club B günstiger, will ich hingegen sehr viel (über 6 Stunden) spielen, so ist trotz hoher Aufnahmegebühr Club A günstiger.