1 Prozentrechnung

Eigentlich ist Prozentrechnung nur eine Ergänzung und Spezifizierung der Bruchrechnung. Das Besondere ist hierbei, dass mit Dezimal-, genauer mit Hundertstel-Brüchen gearbeitet wird.

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Hieraus ergibt sich u.a. 1=100%, $\frac{1}{3} = 33,\overline{3}\% \approx 33,33\%$, $\frac{2}{3} = 66,\overline{6}\% \approx 66,67\%$
Sinn der Prozentrechnung ist die Angabe sogenannter prozentualer Anteile und Veränderungen, so sagt man z.B. statt „$\frac{1}{4}$ der Schüler tragen Jeans“ nun „25% der Schüler tragen Jeans“. Bei letzterer „prozentualer“ Angabe gehört zu dem Prozentsatz (25%) der Prozentwert (P), das sind z.B. 6 jeanstragende Schüler bei insgesamt 24 Schülern (G). Schwierig ist es manchmal, den Grundwert (G) zu identifizieren, auf den der prozentuale Anteil bezogen wird, oft steht der Grundwert hinter dem Schlüsselwort „von“, z.B. wie im Text: „Sechs von 24 Schülern tragen Jeans in der Klasse“. Für viele SuS verwirrend ist der Umgang mit den Formeln, zumal es zwei etablierte Schreibweisen gibt:

Prozentsatz ohne zusätzlichem %	Prozentsatz mit zusätzlichem %
Prozentsatz $p = \frac{P}{G}$ Häufig: $0 < p < 1 = 100\%$	Prozentsatz $p\% = \frac{P}{G}$ | Beachte $1\% = \frac{1}{100}$ Häufig: $0 < p < 100 = 10000\%$ $p \cdot \frac{1}{100} = \frac{P}{G}$ | $\cdot 100$ $p = \frac{P}{G} \cdot 100$
Prozentwert $P = p \cdot G$	Prozentwert $P = \frac{p \cdot G}{100}$
Grundwert $G = \frac{P}{p}$	Grundwert $G = \frac{P}{p} \cdot 100$

Beide Definitionen des Prozentsatzes führen also zu ähnlichen Formeln, unterscheiden sich aber jeweils um den Faktor 100. Bei Aufgaben zum vermehrten Grundwert kann man schließlich auf Prozentsätze stoßen, die größer als 100% sind ($p > 1$ bzw. $p\% > 100\%$), wenn der zugehörige Prozentwert als der vermehrte Grundwert interpretiert wird.

2 Zinsrechnung

Eigentlich ist Zinsrechnung nur eine Ergänzung und Spezifizierung der Prozentrechnung. Das Besondere ist hierbei, dass bei der Zinseszinsrechnnug Prozentrechnungsvorgänge potenziert werden. Wiederum benennt man das Kind um: Grundwert wird zu Kapital ($K = G$), Prozentwert wird zu Zinsen ($Z = P$), und der Prozentsatz heißt nun Zinssatz ($p = p$). In diesem

Sinne haben die Formeln der Prozentrechnung weiter Gültigkeit. Insbesondere werden Kapital (Grundwert) und Zinsen (Prozentwert) zu einem neuen Endkapital addiert, analog dem o.g. vermehrten Grundwert.

Bei der **Zinseszinsrechnung** betrachtet man z.B. die Formel $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$. Dies lässt sich leicht bis auf Bruchrechnung zurück führen. K_n ist das angesparte Kapital nach n Jahren. K_0 ist das Startkapital, was auf eine einmalige Einzahlung (Einlage) bei der Bank herrührt. $p\%$ ist der Zinssatz, mit dem das Kapital (Guthaben) jährlich verzinst (vermehrt) wird, also sind $Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$ die Zinsen nach einem Jahr, d.h. der dem Prozentsatz entsprechende Prozentwert, so dass $\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}$ wieder der Bruch ist, der dem Prozentsatz entspricht. :-)

Das Kapital nach einem Jahr heißt K_1 und ist die Summe aus Startkapital K_0 und Zinsen Z_1: $K_1 = K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Das neue Kapital wird erneut und auf gleicher Weise mit dem Zinssatz $p\%$ verzinst, so dass sich ergibt: $K_2 = K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Diese Folge (und Schlußfolgerung) lässt sich leicht fortführen $1 \to 2 \to 3 \to \ldots$. Ebenso ist möglich, K_1 wieder auf K_0 zurück zu führen und somit $K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$ für K_1 **einzusetzen**. Damit folgt: $K_2 = K_1 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Nach den Regeln der Potenzregeln schreibt man dies auch:

$$K_2 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Wenn man die 2 (2 Jahre ansparen) auf beliebiges n (n Jahre ansparen) verallgemeinert, hat man (obige) **Zinseszinsformel**.

Genau so gut, wenngleich umständlicher und langwieriger, kann schrittweise zum Endkapital aufsummiert werden, z.B. $K_2 = K_0 + Z_1 + Z_2$, wobei die Zinsen analog dem Prozentwert der Prozentrechnung berechnet werden.