

Lies genau die Aufgabenstellung! Schreibe ordentlich. Eine schlechte äußere Form führt zu Punktabzug. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar sein und durch einen kurzen Text begründet werden!

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

Bearbeitungszeit: 90 min

<p>1. Zeige, dass die angegebene Zahl x_1 Nullstelle der angegebenen Funktion ist und bestimme die weiteren Nullstellen mittels Polynomdivision:</p> <p>(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x_1 = 2$</p> <p>(b) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2; x_1 = 1$</p>	12
<p>2. Untersuche rechnerisch den Graphen von f auf Symmetrie und Verhalten im Unendlichen.</p> <p>(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$</p> <p>(b) $f(x) = x^5 - 4,5x^3 - 3,75x$</p> <p>(c) $f(x) = x^2 \cdot (2 - x)^2$</p>	14
<p>3. Gegeben sei die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}$.</p> <p>(a) Nenne den Grad der Funktion f und treffe eine begründete Aussage über mögliche Nullstellen der Funktion.</p> <p>(b) Berechne die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen.</p> <p>(c) Untersuche die Funktion f auf Symmetrie.</p> <p>(d) Zeichne den Graphen der Funktion f für $-3,5 \leq x \leq 3,5$</p> <p>(e) Wie muss der Graph verschoben werden, damit f genau drei Nullstellen besitzt? Gebe auch die zugehörige Funktionsgleichung an.</p> <p>(f) Zeige, dass nach der Verschiebung aus Aufgabenteil (e) eine doppelte Nullstelle vorliegt.</p> <p>(g) Bestimme die Gleichung der quadratischen Funktion g, deren Graph die gleichen Achsenschnittpunkte wie f besitzt.</p>	34

Bitte wenden...

<p>4.</p> <p>(a) Bestimme eine ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph bei $x = 1$, $x = -1$ und $x = 5$ Nullstellen hat.</p> <p>(b) Welche Veränderungen musst Du vornehmen, damit der Graph der Dir aufgestellten Funktion zusätzlich noch durch den Punkt $(-3 3)$ geht? Verwende den folgenden Ansatz: $g(x) = a \cdot f(x)$ und $g(-3) = 3$.</p> <p>(c) Erkläre, ob die von Dir aufgestellten Funktionen in Aufgabenteil (a) und (b) die einzig möglichen sind, oder ob es mehrere Lösungen geben kann.</p>	10
<p>5. Auf einem Acker werden zur Unkrautvernichtung 270 kg eines Unkrautverteilungsmittels aufgebracht. Der Bestand des Mittels verringert sich wöchentlich um 18 %. Nach wie vielen Wochen ist davon nur noch die Hälfte bzw. nur noch ein Viertel auf dem Acker?</p>	6
Form	2
SUMME	78

Viel Erfolg!

Note:

1. (a) Es ist $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$

Die weiteren Nullstellen erhält man durch die Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 2) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -4x^2 + 11x \\ \underline{4x^2 - 8x} \\ 3x - 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Da man nun eine Funktion zweiten Grades hat, erhält man die weiteren Nullstellen über die pq -Formel:

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$$

Also sind die Nullstellen $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$

(b) Es ist $f(1) = 1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$

Die weiteren Nullstellen erhält man durch die Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ 2x^3 - x^2 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \\ x^2 + x \\ \underline{-x^2 + x} \\ 2x - 2 \\ \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

Da es sich um eine Funktion dritten Grades handelt, muss man eine weitere Nullstelle erraten. Man erhält durch raten $x_2 = -2$ als weitere Nullstelle:

$$f(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 2 + 2 = 0$$

Dann führt man erneut eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + x + 2) : (x + 2) = x^2 + 1 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ x + 2 \\ \underline{-x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Die weiteren Nullstellen erhält man durch die Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Hier sieht man, dass es keine weiteren Nullstellen gibt.

Also sind die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$

2. (a) Zunächst die Untersuchung der Symmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 - 9 \cdot (-x) - 9 \\ &= -x^3 + x^2 + 9 - 9 \end{aligned}$$

Da dies weder $f(x)$ noch $-f(x)$ entspricht, liegt keine Symmetrie vor.

Verhalten im Unendlichen: Dazu schaut man sich den höchsten Exponenten an, in diesem Fall x^3 .

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x)$ gegen $-\infty$.

Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x)$ gegen ∞

- (b) Zunächst die Untersuchung der Symmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - 4,5(-x)^3 - 3,75 \cdot (-x) \\ &= -x^5 + 4,5x^3 + 3,75 \cdot x \\ &= -(x^5 - 4,5x^3 - 3,75x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Damit ist f symmetrisch zum Ursprung.

Verhalten im Unendlichen: dazu schaut man sich den höchsten Exponenten an, in diesem Fall x^5 .

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x)$ gegen $-\infty$.

Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x)$ gegen ∞

- (c) Die Funktion $f(x) = x^2 \cdot (2 - x)^2$ muss zunächst ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot (2 - x)^2 \\ &= x^2 \cdot (4 - 4x + x^2) \\ &= 4x^2 - 4x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Untersuchung der Symmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^2 - 4(-x)^3 + (-x)^4 \\ &= 4x^2 + 4x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Da dies weder $f(x)$ noch $-f(x)$ entspricht, liegt keine Symmetrie vor.

Verhalten im Unendlichen: Dazu schaut man sich den höchsten Exponenten an, in diesem Fall x^4 .

Für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x)$ gegen ∞ .

Für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x)$ gegen ∞

3. (a) Die Funktion ist vom Grad vier und somit kann die Funktion bis zu vier Nullstellen haben.

(b) **y-Achse:** Es ist $f(0) = -\frac{3}{2}$.

Damit ist der Schnittpunkt mit der y -Achse $(0 | -\frac{3}{2})$

x-Achse: Um die Schnittpunkte mit der x -Achse zu bestimmen. Hierzu kann man in der gegebenen Funktion x^2 durch z substituieren und damit die pq -Formel anwenden. Die neue Funktion lautet: $f(z) = \frac{1}{6}z^2 - \frac{4}{3}z - \frac{3}{2}$, $z \in \mathbb{R}$.

Setzt man diese gleich 0 erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}z^2 - \frac{4}{3}z - \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow z_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16 + 9} \\ &= 4 \pm 5 \end{aligned}$$

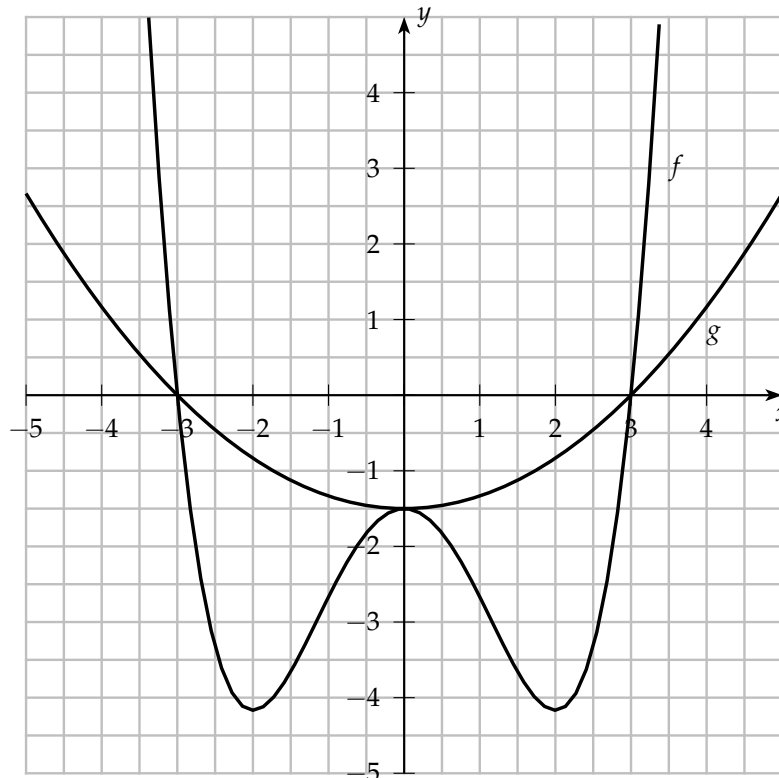
Also ist $z_1 = -1$ und $z_2 = 9$. Da $z = x^2$ ist, erhält man die Nullstellen, indem man $x = \sqrt{z}$ berechnet.

Da $z_1 = -1$, kommt dies nicht als Nullstelle in Frage, da man nicht die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen darf. Es bleibt dann nur noch $z_2 = 9$ über. Also sind die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$. Diese beiden Nullstellen sind jeweils doppelte Nullstellen.

- (c) *Symmetrie:*

Es ist $f(-x) = \frac{1}{6}(-x)^4 - \frac{4}{3}(-x)^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2} = f(x)$. Somit ist f symmetrisch zur y -Achse.

- (d) *Der Graph:*



- (e) Der Graph muss um $+\frac{3}{2}$ in y -Richtung verschoben werden. Dann lautet die Funktion: $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^2 = x^2(x^2 - 8)$

(f) Die Funktion aus Aufgabenteil (e) lautet nun $f(x) = x^2(x^2 - 8)$. Die Nullstellen dieser Funktion liegen bei $x^2 = 0$ und $x^2 - 8 = 0$. Damit liegt eine doppelte Nullstelle bei $(0|0)$ und die anderen beiden bei $(-\sqrt{8}|0)$ und $(\sqrt{8}|0)$.

(g) Es sind die folgenden drei Schnittpunkte zu beachten: $(-3|0)$, $(3|0)$ und $(0|-1,5)$. Die quadratische Funktion g die diese Bedingungen erfüllt, ist von der Form $g(x) = ax^2 + c$. Man stellt sich mit den Schnittpunkten die folgenden Gleichungen auf:

$$(I) \quad 0 = a \cdot (-3)^2 + c$$

$$(II) \quad 0 = a \cdot (3)^2 + c$$

$$(III) \quad -1,5 = a \cdot (0)^2 + c$$

Aus (III) folgt $c = -1,5$. Einsetzen in (II) liefert $0 = 9a - 1,5$ also $a = \frac{1}{6}$.

Damit lautet die Funktion $g(x) = \frac{1}{6}x^2 - 1,5$. Diese ist unter (d) mit in das Koordinatensystem eingezeichnet.

4. (a) Es ist $f(x) = (x-1)(x+1)(x-5) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

(b) Es ist $g(-3) = a \cdot f(-3) = a \cdot (-4) \cdot (-2) \cdot (-8) = a \cdot (-64) = 3$. Damit ist $a = -\frac{3}{64}$. Also ist $g(x) = -\frac{3}{64}(x-1)(x+1)(x-5)$.

(c) Für den Aufgabenteil (a) sind unendlich viele Lösungen möglich:

$f(x) = a \cdot (x-1)(x+1)(x-5)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Sie ist jedoch eindeutig bestimmt durch die weitere Eigenschaft, dass die Funktion durch den Punkt $(-3|3)$ gehen soll.

5. Die Zerfallsfunktion lautet $f(x) = 270 \cdot 0,82^x$, wobei x die Anzahl der Wochen darstellt.

- Nur noch die Hälfte vorhanden:

$$135 = 270 \cdot 0,82^x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0,82^x \Leftrightarrow \frac{\lg(\frac{1}{2})}{\lg(0,82)} = x \Leftrightarrow x = 3,49$$

Nach 3,49 Wochen ist nur noch die Hälfte des Unkrautvernichters auf dem Feld.

- Nur noch ein Viertel vorhanden:

$$67,5 = 270 \cdot 0,82^x \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 0,82^x \Leftrightarrow \frac{\lg(\frac{1}{4})}{\lg(0,82)} = x \Leftrightarrow x = 6,99$$

Nach rund sieben Wochen ist nur noch ein Viertel des Unkrautvernichters auf dem Feld.