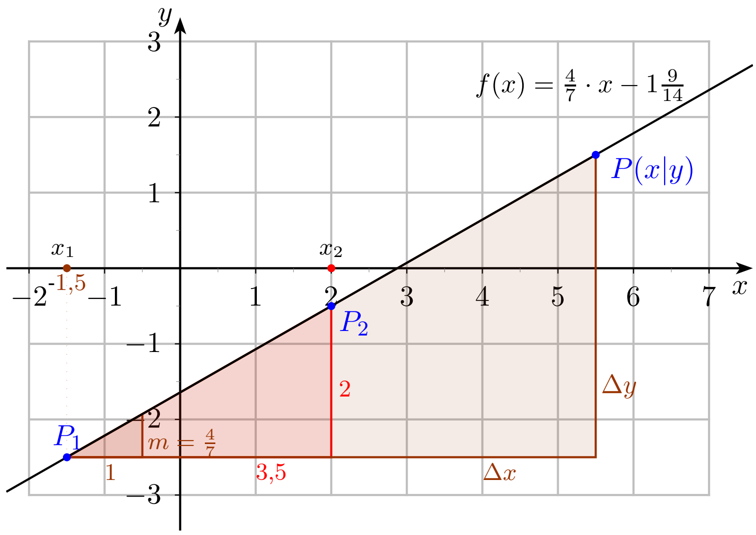
1 Die Zwei-Punkte-Form für Geraden

Lineare Funktionen können mittels der Zwei-Punkte-Form (2PF) eindeutig bestimmt werden. Voraussetzung ist, dass 2 Punkte gegeben sind, durch die die Gerade verläuft. Dass eine Gerade eindeutig durch zwei Punkte bestimmt ist, ist den meisten SuS klar. Dennoch macht der Umgang und das Verständnis der 2PF Schwierigkeiten.

Eine Gerade hat nur eine einzige Steigung m, hätte sie mehr als eine Steigung, so wäre sie ja auch nicht mehr gerade :-). Diese Steigung lässt sich als Differenzenquotient schreiben: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Für m ist es dabei unerheblich, wie groß die Differenzen sind. Ist bei einer Geraden Δx größer gewählt, so ist Δy verhältnismäßig ebenfalls größer.

Anhand einer Skizze wird dieser Sachverhalt klarer:

Gegeben: 1. Punkt $P_1(x_1|y_1)$, 2. Punkt $P_2(x_2|y_2)$
Zum Beispiel: $P_1(-1{,}5 \mid -2{,}5)$, $P_2(2 \mid -0{,}5)$
Die Steigung ist dann **konkret** der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0{,}5+2{,}5}{2+1{,}5} = \frac{2}{3{,}5} = \frac{4}{7}$ wie man im Bild sieht. Die Steigung hat nur diesen einen Wert, den man immer erhält, egal welches Steigungsdreieck man heran zieht. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ bezieht sich auf das **große** Steigungsdreieck mit $P_1(x_1|y_1)$ und einem **beliebigen** Punkt $P(x|y)$, der lediglich auf der Geraden liegen muss. $\frac{4}{7}$ bezieht sich auf das 1. Steigungsdreieck links, mit $\Delta x = 1$, $\frac{2}{3{,}5}$ bezieht sich auf das 2. Steigungsdreieck in rot.
$y = \frac{-0{,}5+2{,}5}{2+1{,}5} \cdot (x + 1{,}5) - 2{,}5 = \frac{4}{7} \cdot (x + 1{,}5) - 2{,}5 = \frac{4}{7} \cdot x + \frac{4}{7} \cdot 1{,}5 - 2{,}5 = \frac{4}{7} \cdot x - 1\frac{9}{14}$



Abstrakt ergibt sich aus der Skizze mit einem **beliebigen** Punkt $P(x|y)$ der Geraden aus der Eindeutigkeit der Steigung m die Gleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht umstellen in die sogenannte **Zwei-Punkte-Form**:

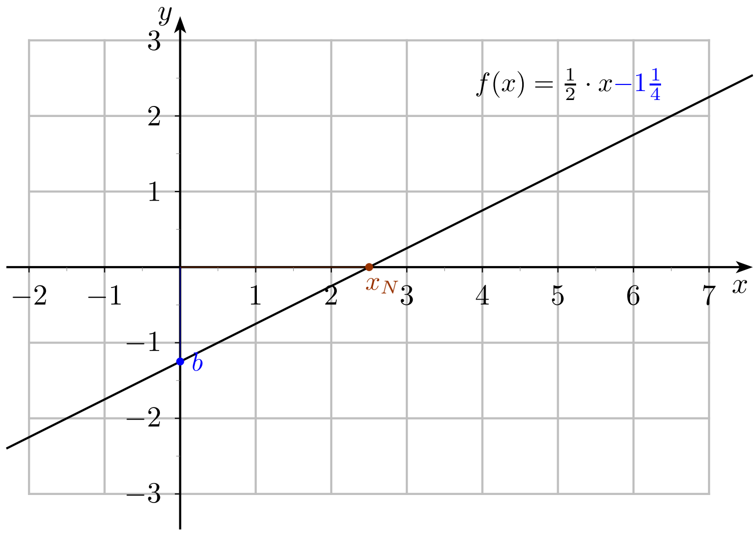
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

2 Achsenabschnittsform für Geraden

Gewöhnliche Geraden schneiden beide Koordinatenachsen, d.h. sowohl die x- als auch die y-Achse. Diese Schnittpunkte haben besondere Bedeutung und sind mit besonderen Namen verbunden: y-Achsenabschnitt b (vgl. NF) und Nullstelle x_N, wo die x-Achse geschnitten wird. Bekannt ist bereits, dass eine Gerade eindeutig durch 2 Punkte bestimmt ist, durch die die Gerade verläuft. Folglich kann man eine Gerade auch durch die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen eindeutig bestimmen. Die 2PF lautet bekanntlich: $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot (x-x_1) + y_1$. Wenn wir für die beiden Punkte $P_1 = S_x(x_N|0)$ und $P_2 = S_y(0|b)$ einsetzen, ergibt sich: $y = \frac{b-0}{0-x_N} \cdot (x-x_N) = \frac{b}{-x_N} \cdot (x-x_N)$. Letzteres lässt sich schrittweise umstellen zu: $\frac{y}{b} = -\frac{x}{x_N} + 1$ und schließlich auf die Achsenabschnittsform (AaF) bringen:

$$\frac{x}{x_N} + \frac{y}{b} = 1$$

Dabei bedeuten:
b: Achsenabschnitt auf der y-Achse (Schnittpunkt der Geraden auf der y-Achse, y-Achsenabschnitt, vgl. NF)
x_N: Achsenabschnitt auf der x-Achse, oft auch mit dem Buchstaben a bezeichnet (Schnittpunkt der Geraden auf der x-Achse, Nullstelle)
Die Achsenabschnitte können auch positiv oder negativ ausfallen, je nachdem ob die zugehörigen Achsenschnittpunkte der Geraden auf dem positiven oder negativen Teil der Achsen liegen.



Die AaF lässt sich leicht auf weitere Dimensionen verallgemeinern, so gibt es auch eine AaF für Ebenen im Raum: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.