1 Quadratische Funktionen — Übungen mit der Schablone

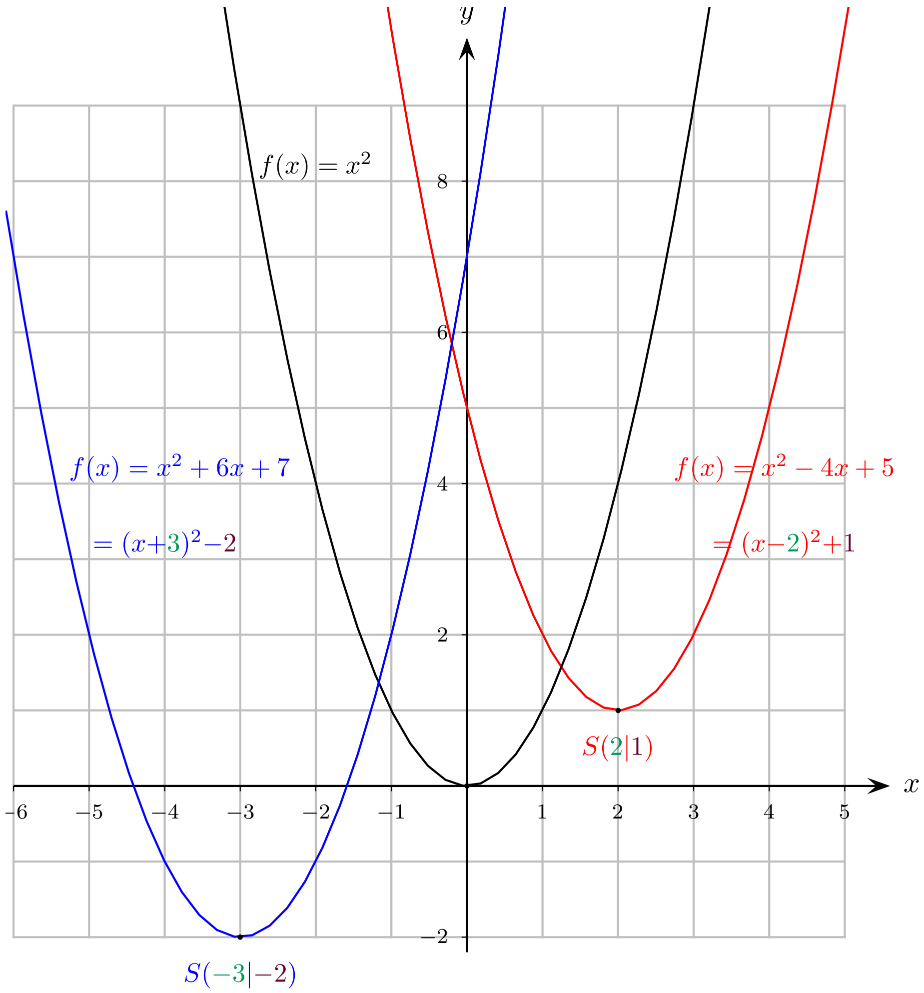
Mithilfe der Parabelschablone und einigen Umformungen lassen sich schnell die Graphen quadratischer Funktionen in Normalform (NF) zeichnen.

Ein Beispiel mit Lösung:

Zeichnet ohne Nutzung einer Wertetabelle die Graphen folgender Funktionen in ein Koordinatensystem: $y = x^2 - 4x + 5$ $[= (x-2)^2 + 1]$ und $y = x^2 + 6x + 7$ $[= (x+3)^2 - 2]$

In der Aufgabenstellung ist bereits die Scheitelpunktform (SpF) der quadratischen Gleichung in den eckigen Klammern angegeben [...]. Somit kann man die Graphen zeichnen, indem man die Normalparabelschablone verwendet und eine **verschobene** Normalparabel zeichnet. In der runden Klammer steht der x-Wert um den nach links verschoben wird: $(x-2)$ bedeutet, dass um -2 nach links, d.h. um $+2$ nach rechts verschoben gezeichnet wird. Der Wert hinter der Hochzahl gibt den y-Wert an, um den nach oben verschoben wird: $)^2 + 1$ bedeutet also, dass die Normalparabel um 1 nach oben verschoben ist.

Versucht die beiden Beispiele und ihr kommt zu der folgenden Zeichnung:



Aber was tun, wenn die SpF gar nicht gegeben ist?

Dann könnte man ohne Schablone mit Wertetabelle zeichnen, doch das kostet sehr viel Zeit! Also muss aus der Normalform (NF) besser erst die SpF ausgerechnet werden. Liegt die Funktionsgleichung in der SpF vor, dann kann wie im obigen Beispiel nämlich schnell mit der Schablone die Zeichnung erstellt werden. Die SpF und damit die Scheitelpunkte wurden mittels **quadratischer Ergänzung** berechnet (alternativ könnte man sie auch mittels Differentialrechnung bestimmen, doch das kommt erst viel später dran). Die folgenden **binomischen Formeln** dürften bekannt sein:

$$\boxed{\text{1. Binom. Formel: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{\text{2. Binom. Formel: } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Bei der quadratischen Ergänzung musst du zusehen, dass du den Funktionsterm auf die Form einer binom. Formel bringst. Ein **Beispiel** für einen Funktionsterm wäre $\boxed{y = x^2 + 4x + 5}$. Da vor dem $4x$ ein $+$ steht, musst du also die 1. binom. Formel anwenden. Dem a in der binom. Formel entspricht hier das x (weil wir hier mit quadratischen Funktionen arbeiten $x^2 = a^2$). Deine Aufgabe ist es nun das b rauszubekommen (, damit du dann in diesem Fall die 5 zu b^2 ergänzen kannst). Das b bekommt man über den Mittelteil ($+4x$) heraus. Das $2ab$ aus der binom. Formel muss gleich dem Mittelteil (mit x) des Funktionsterms sein ($+4x$), also:
$2ab = 4x$ da gilt $a = x$, können wir also sagen:
$2xb = 4x \quad | : x$
$2b = 4 \quad | : 2 \Rightarrow b = 2$
Und schon haben wir das b. Damit wir die binom. Formel anwenden können, muss am Ende unseres Funktionsterm aber b^2 stehen, also 4. Leider steht da aber 5, deshalb machen wir die sogenannte quadratische Ergänzung (kürze ich **qE** ab). D.h. wir addieren $b^2 = 4$ und ziehen es gleich wieder ab, damit sich aber der Wert der Funktion nicht ändert. Genausogut könnten wir auf beide Seiten der Gleichung einfach 4 addieren (damit die Gleichung weiter gilt):
$y + 4 = x^2 + 4x + 4 + 5$
Und jetzt können wir ohne Probleme $x^2 + 4x + 4$ mit der 1. binom. Formel zu $(x+2)^2$ zusammenfassen:
$y + 4 = (x+2)^2 + 5$
Das wir eben gemacht haben, nennt man quadratische Ergänzung, weil man ja mit dem quadratischen b^2 der binom. Formel „ergänzt". Wenn wir (spätestens) jetzt das $b^2 = +4$ wieder abziehen, haben wir die Scheitelpunktsform (SpF), da man aus ihr leicht den Scheitelpunkt S ablesen kann:
$y + 4 - 4 = (x+2)^2 + 5 - 4$
$y = (x+2)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad S(-2 \mid -1)$ ist der gesuchte Scheitelpunkt.

Genauso geht's mit dem Beispiel, das wir schon gezeichnet haben: $f(x) = x^2 + 6x + 7$
Wir halbieren die 6 aus dem x-Term ($6x$) und erhalten $b = 3$. Die qE wäre dann mit $b^2 = 3^2 = 9$. Die 1. binom. Formel ergäbe $(x+3)^2$, so dass wie in der Zeichnung um 3 nach links verschoben werden muss. Da wir von den 7 aus der NF auch wieder die 9 der qE ($b^2 = 9$) abziehen müssen ergibt sich für die SpF: $f(x) = (x+3)^2 - 2$, wie bereits in den eckigen Klammern der Aufgabenstellung gegeben war.

2 Aufgaben

Berechnet zunächst SpF und den Scheitelpunkt S und zeichnet dann mit der Schablone den Graphen der Funktion. Zur Kontrolle ist der Scheitelpunkt angegeben.

1. $y = x^2 + 6x + 8$ $S(-3 \mid -1)$
2. $y = x^2 - 4x + 7$ $S(2|3)$
3. $y = x^2 - 2x - 1$ $S(1 \mid -2)$
4. $y = x^2 + 4x + 6$ $S(-2 \mid 2)$
5. $y = x^2 - 8x + 14$ $S(4 \mid -2)$
6. $y = x^2 + 8x + 17$ $S(-4 \mid 1)$
7. $y = x^2 + 2x$ $S(-1 \mid -1)$
8. $y = x^2 - 6x + 11$ $S(3 \mid 2)$
9. $y = x^2 + 4x + 1$ $S(-2 \mid -3)$
10. $y = x^2 - 3x + 4{,}25$ $S(1{,}5 \mid 2)$
11. $y = x^2 + 5x + 4{,}75$ $S(-2{,}5 \mid -1{,}5)$
12. $y = x^2 - x + 2{,}75$ $S(0{,}5 \mid 2{,}5)$
13. $y = -(x^2 - 2x - 3)$ $S(1 \mid 4)$
14. $y = -(x^2 + 2x - 1)$ $S(-1 \mid 2)$
15. $y = -(x^2 + 3x - 2{,}25)$ $S(-1{,}5 \mid 4{,}5)$
16. $y = -2 \cdot (x^2 + 2x + 2)$ $S(-1 \mid -2)$

Bei den letzten vier Aufgaben müsst ihr beachten, dass die Parabel nach **unten** geöffnet ist! Bei der allerletzten Aufgabe handelt es sich noch nicht einmal um eine Normalparabel, sondern um eine mit dem Faktor 2 gestreckte Parabel, die nach unten geöffnet ist.

3 Randnotiz: 1. Binomische Formel geometrisch

Wie evtl. aus der Sekundarstufe I noch bekannt ist, lässt sich die 1. Binomische Formel auch geometrisch interpretieren. Man sieht in der neben stehenden Abbildung ein rot umrandetes Quadrat mit der Fläche $A = (x + b)^2$. Diese Fläche des roten Quadrats setzt sich zusammen aus der Fläche des grünen Quadrats $A_x = x \cdot x = x^2$ plus der Fläche des blauen Quadrats $A_b = b^2$ sowie **zwei** weißen Rechteckflächen $A_w = b \cdot x$. Man erkennt also die Zerlegung: $(x + b)^2 = x^2 + 2 \cdot b \cdot x + b^2$. Diese Gleichung nennt man auch 1. Binomische Formel. Wenn man mathematisch für b eine negative Zahl einsetzt, dann hat man die 2. Binomische Formel.