Umkehrung und Umkehrfunktion	*Datum*
Das Vertauschen von x und y	*27. November 2013*

1 Operation und Umkehr-Operation

Bei einer Funktion $y = f(x)$ werden bestimmte Operationen auf x angewandt, so dass zu jedem x aus der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ein y aus einer Wertemenge $\mathbb{W}$ zugeordnet wird. Die Umkehrfunktion $x = i(y)$ würde unter bestimmten Voraussetzungen aus dem y (aus $\mathbb{W}$) wieder genau ein x (aus $\mathbb{D}$) bestimmen.

Die Umkehr-Operation hebt die Wirkung der Operation auf, wenn wie im unteren Beispiel die Operation „verdoppeln" durchgeführt wurde, so hebt die Umkehr-Operation „halbieren" die Wirkung der Operation wieder auf, und man gelangt wieder zum ursprünglichen x.
Beispiele:

Operation	Beispiel	Umkehroperation	Beispiel
addieren	$y = x + 2$	subtrahieren	$x = y - 2$
multiplizieren	$y = x \cdot 2$	teilen (dividieren)	$x = y : 2$
quadrieren	$y = x^2$	Wurzel ziehen (radizieren)	$x = +\sqrt{y}$
potenzieren	$y = x^n$	n. Wurzel ziehen	$x = +\sqrt[n]{y}$
exponieren	$y = e^x$	logarithmieren	$x = \ln y$
Sinus bilden	$y = \sin x$	Arcus-Sinus bilden	$x = \sin^{-1}(y)$

Allgemein kommt man zur Umkehr-Operation indem man x und y vertauscht, und dann die Gleichung wieder nach x umstellt. Schauen wir uns dies am Beispiel des potenzierens noch einmal genauer an: Wenn $f(x)$ die Funktion ist, die zu jedem x die n. Potenz von x bildet, so lautet die Funktionsgleichung mit der Operation „potenzieren":

1. $f(x) = x^n$, hierbei interpretieren wir $y = f(x)$ und schreiben erneut:
2. $y = x^n$, nun kommt der wesentliche Schritt der Umkehrung, nämlich das Vertauschen x mit y:
3. $x = y^n$, diese Art der Funktionsgleichung gilt natürlich **nicht** mehr für die Ursprungsfunktion $f(x)$, sondern jetzt für die Umkehrfunktion $i(x)$ von $f(x)$
4. $+\sqrt[n]{x} = y$ ergibt sich durch das n. Wurzelziehen (Radizieren) der getauschten Gleichung
5. $i(x) = +\sqrt[n]{x}$ wäre also die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

Wir wissen hierbei, dass bei geraden Exponenten, z.B. $n = 2$ (quadrieren), auch negative Argumente prinzipiell zu beachten sind. Damit eine Umkehrfunktion aber eine Funktion ist, d.h. eindeutige Funktionswerte liefert, müssen wir die Wertemenge der Umkehrfunktion künstlich einschränken. Ein Beispiel $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2$ liefert nach x aufgelöst: $x = \pm\sqrt{y}$, d.h. zu jedem y gibt es **zwei** x. Wenn wir nun für die Umkehrfunktion x und y vertauschen, hätten wir eigentlich $y = \pm\sqrt{x}$, was wegen dem $\pm$ aber **keine** Funktion wäre. Also wird es eine Funktion, wenn wir nur noch positive Werte zulassen: $i(x) = +\sqrt{x}$.

2 Ganz anschaulich

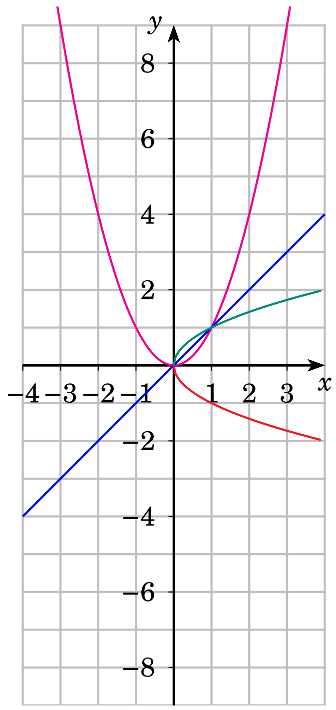
Der Preis ist in der Regel eine Funktion der gekauften Menge. Die Funktionsvorschrift könnte lauten: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x$, wenn f der Preis der gekauften Menge von z.B. Milch ist, jeder Liter 50 Cent kostet und x die Anzahl der gekauften Liter ist. Angenommen nun, ich war im Supermarkt und habe für 6 Euro Milch gekauft, weiß aber nicht mehr, wieviele Liter es waren. Diesmal muß ich also nicht mehr wie oben der (bekannten) Literzahl einen (noch unbekannten) Preis zuordnen, sondern umgekehrt einem (bekannten) Preis eine (noch unbekannte) Literzahl. Die entsprechende Umkehrfunktion wäre für dieses Beispiel $i(x) = 2 \cdot x$, wobei i nun aber die Litermenge und x der bezahlte Preis für die Milch ist. Wenn ich dann für $x = 6$ meine ausgegebene Geldsumme in die Umkehrfunktion eingebe erhalte ich die gekaufte Menge (12 Liter Milch).

3 Umkehrfunktionen

Liegt eine Umkehrfunktion $i(x)$ vor, kann man ihren Graphen graphisch auch durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ des Graphen des Ursprungsgraphen $f(x)$ ermitteln.

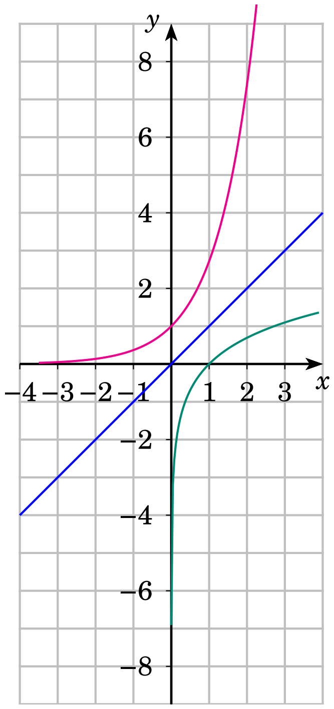
3.1 Beispiel: $f(x) = x^2$

1. Zeichne den Graphen der Funktion, z.B, $y = x^2$
2. Zeichne den Graphen der Winkelhalbierenden $y = x$
3. Führe eine Achsenspiegelung an dieser Winkelhalbierenden durch (z.B. durch geschicktes Knicken des Papieres, mit Spiegel, oder durch genaues Abmessen mit dem Geodreieck) und zeichne so die Umkehrfunktion $i(x)$. Für die Umkehrfunktion ist nur der positive Wurzelast zu gebrauchen, damit es sich um eine eindeutige Funktion handelt.



Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang der Graphen. Die Ausgangsfunktion $f(x) = x^2$ ist in der Farbe Magenta gezeichnet. Dann erkennt man die blaue Winkelhalbierende $y = x$. Und schließlich sind die beiden Wurzeläste dargestellt, die sich aus der Spiegelung von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden ergeben. Hiervon benutzen wir nur den oberen grünen Wurzelast $i(x) = +\sqrt{x}$, damit $i(x)$ auch tatsächlich eine Funktion ist, die jedem x eindeutig auch nur **ein** y zuordnet. Den roten unteren Wurzelast $-\sqrt{x}$, den wir auch aus der Spiegelung von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden erhalten würden, beachten wir nicht; er ist als Teil der Funktion verboten.

3.2 Beispiel mit der Exponentialfunktion



Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang der Graphen. Die Ausgangsfunktion $f(x) = e^x$ ist in der Farbe Magenta gezeichnet. Die Exponentialfunktion nimmt ihr Argument x als Exponenten (Hochzahl). Dann erkennt man die blaue Winkelhalbierende $y = x$. Und schließlich ist die grüne Umkehrfunktion $i(x) = +\ln x$ dargestellt, die nur für positive $x > 0$ definiert ist. ln steht für Logarithmus naturalis, also sogenannter natürlicher Logarithmus. Er ist als Umkehrung der Exponentialfunktion notwendig. Eine Gleichung z.B. $e^x = 10$ kann nur mithilfe des Logarithmus naturalis nach x aufgelöst werden: $e^x = 10 \quad |\ln \quad \Rightarrow \quad \ln(e^x) = \ln 10 \quad \Rightarrow$ $x = \ln 10 \approx 2{,}302585092994045684017991454684$.

Weitere Übungen zum Logarithmus finden sich z.B. unter:
http://www.warncke-family.de/fos/wachstum_brunnen.pdf
und ausführlich zum Bearbeiten über die Osterferien
http://www.warncke-family.de/fos/wachstum_ostern.pdf.

4 Beispiel mit einer Trigonometrischen Funktion

Diese werden auch periodische Funktionen genannt, da sich ihre Funktionswerte immer wieder, periodisch wiederholen. Dies bedeutet auch, dass die Funktionen nicht eineindeutig sind, und streng genommen gar nicht umkehrbar sind, ähnlich dem zuvor besprochenen Beispiel mit Parabeln $y = x^n$, und n gerade Ganzzahl (z.B. $n = 2$, d.h. $y = x^2$).

Symmetrie (Achsensymmetrie bzgl. Parallelen zur y-Achse, die durch Extremstellen gehen, YAS bei $\cos x$ und 0PS bei $\sin x$) und die Periode 2π spiegeln sich in den folgenden Identitäten wieder:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{1}$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{2}$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \tag{3}$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \tag{4}$$
$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x \tag{5}$$
$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \tag{6}$$
$$\sin(x + \pi/2) = \cos x \tag{7}$$
$$\cos(x + \pi/2) = -\sin x \tag{8}$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x \tag{9}$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \tag{10}$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x \tag{11}$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos x \tag{12}$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos(x) \tag{13}$$

Die letzte Gleichung folgt z.B. auch aus den Gleichungen (2) und (4).

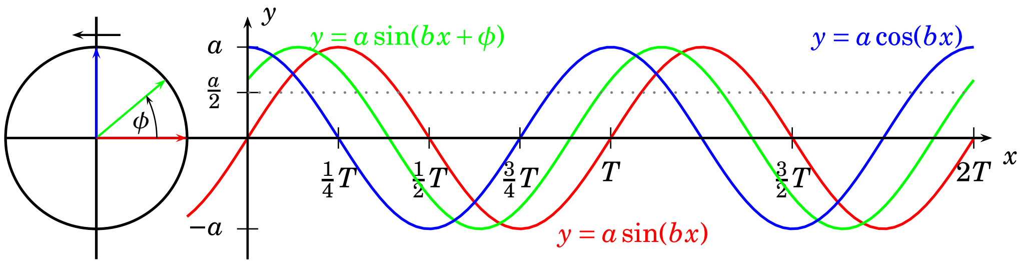
Nehmen wir die Sinus-Funktion: $\sin(x)$. Die Sinusfunktion ordnet jedem Winkel (im Bogenmaß) seinen Sinuswert zu. Bekannte Anwendung der Sinus-Funktion ist die Berechnung der einem Winkel α gegenüberliegenden Seite a im rechtwinkligen Dreieck, bei bekanntem Winkel α und Hypotenuse c: $a = c \cdot \sin\alpha$.

Arcus Sinus ist die zum Sinus inverse Funktion (oder Umkehrfunktion). Der Grund für diese Benennung ist einfach zu verstehen: Arcus Sinus, von lat. arcus „Bogen", ordnet jedem Sinuswert den Winkel (im Bogenmaß) zu, ganz ähnlich, wie das Wurzelziehen die zum Quadrieren inverse Funktion ist. Allerdings gibt es selbst beim Einschränken des Definitionsbereiches auf nur eine Periode: $0 \le x \le 2\pi$, (mind.) zwei Winkel, deren Sinus gleich ist. (Statt Arcus Sinus wird auch $\sin^{-1}$, asin oder $\arcsin$ verwendet.)

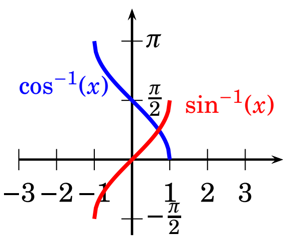
Betrachten wir z.B. den Sinus-Wert 0,5, so gibt es nämlich zwei Winkel (Bogenlängen) $x_1 = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52359877559829887307710723054 66$ und $x_1 = \frac{5\pi}{6} \approx 2{,}61799387799149436538553615273 29$ (das sind Supplementärwinkel; ihre Summe ist $\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327 95$, entsprechend 180 Grad). Erinnern wir uns an Formel (9) - sie besagt, dass Winkel, deren Summe π (180 Grad) ist, denselben Sinus haben.

Konventionell wird ein Taschenrechner nur den Winkel $x_1 = \frac{\pi}{6}$ als Arcus-Sinus von 0,5 liefern. Typischerweise als $\sin^{-1}(0.5) = \frac{1}{6}\pi$. Wenn die Fragestellung lautet: *Gib die Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ *an, für die* $\sin x = 0{,}5$ *gilt.*, so muss man insbesondere die Gleichungen (3) und (9) benutzen. Konkret bedeutet dies, dass zur Lösungsmenge nicht nur $\sin^{-1}(0.5) = \frac{1}{6}\pi$ vom Taschenrechner, sondern auch $\pi - x_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi = x_2$ und alle dazu addierten Vielfache von 2π gehören.
$\sin x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{x \mid x = \frac{1}{6}\pi + 2n\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2n\pi\}, \qquad n \in \mathbb{Z}$
Testen wir mal dieses Ergebnis mit dem Taschenrechner und nehmen das Taschenrechner-Arcus-Sinus x_1, das wir von π abziehen und dann 2π addieren ($n = 1$) als Argument für die Sinus-Funktion: $\sin\left(2\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ — passt.

Will man die Schwingung gleich auf Anwendungen anpassen, die bestimmte Amplituden a und Periodenlängen T haben, so ergibt sich das folgende Bild. Hierbei ist $b = \frac{2\pi}{T}$. Wenn $b = 1$ ist, dann ist $T = 2\pi$ (wenn $b = 0{,}5$ ist, dann ist $T = 4\pi$). Die Amplitude a der Schwingung ist die maximale Auslenkung. (Die gepunktete feine Linie auf Niveau $0{,}5 \cdot a$ passt zur o.g. Fragestellung.)



Für eine Umkehrfunktion der sin- oder cos-Funktion muss also der Definitionsbereich noch



weiter eingeschränkt werden auf $\mathbb{D} = [-1; 1]$, d.h. $-1 \le x \le 1$:

URL dieses Dokumentes ist http://www.warncke-family.de/g13/umkehrfunktion.pdf.