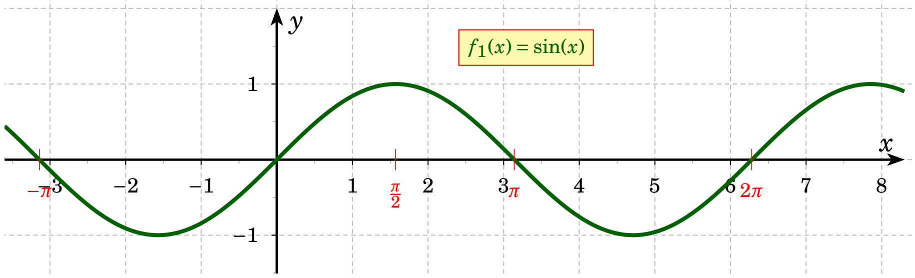
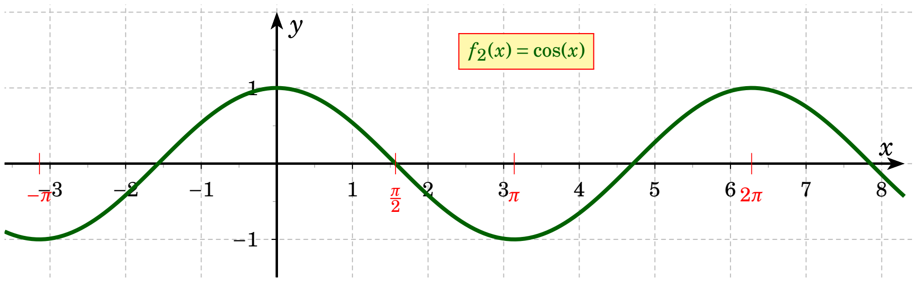
1 Trigonometrische Funktionen: Sinus und Cosinus

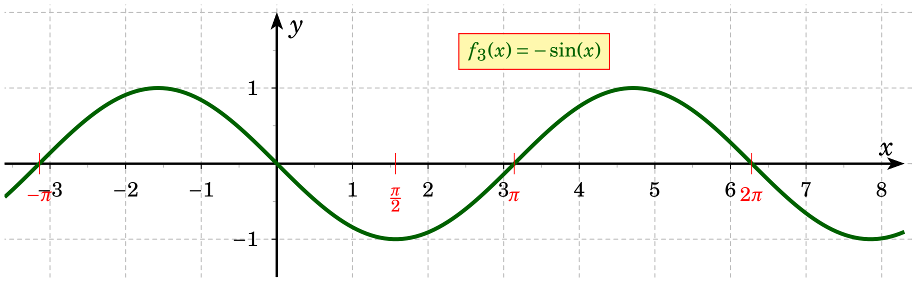
1.1 Graphen

Die folgende Grafik zeigt die Graphen der Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ und $f_3(x) = -\sin(x)$. Markiere in jedem Graphen die Bereiche, in denen der Graph steigt bzw. fällt. Vergleiche dann mit den anderen Graphen im entsprechenden Bereich.

Zeichne nach Augenmaß die **Tangenten** der Sinuskurve (f_1) an den Stellen $x = -\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, 2π. Vergleiche jeweils ihren Steigungswert mit dem Wert des Kosinus (f_2) an der entsprechenden Stelle.







1.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse bestätigen, dass der Kosinus die Ableitung des Sinus ist: $(\sin(x))' = \cos(x)$. Allerdings ist damit kein Beweis gegeben.

Analoge Betrachtungen bestätigen, dass gilt: $(\cos(x))' = -\sin(x)$. Damit gilt auch für die 2. Ableitung der Sinus-Funktion: $(\sin(x))'' = -\sin(x)$.

Außerdem erkennt man an den Graphen, dass sich die Cosinus-Funktion auch durch eine Verschiebung der Sinus-Funktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links ergibt: $\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$, $\sin(x+\pi) = \cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$. Vom rechtwinkligen Dreieck kennt man evtl. auch noch $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$ und $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$.

Einfache Parameteränderungen der allgemeinen Sinus-Funktion lassen sich mithilfe von `http://www.warncke-family.de/g13/Sinusfunktion5.html` durchführen, um diese und andere Zusammenhänge aufzuspüren.

In der Langzeitklausur darf auf die kleine Formelsammlung, online unter:
`http://www.warncke-family.de/g13/g13-Formeln.pdf`, zurück gegriffen werden, die diese Zusammenhänge auflistet.

Bei der Modellierung wird man eine allgemeine Sinusfunktion mit dem Funktionsterm

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$$

benutzen, mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ und $b > 0$. Beim Ableiten (und auch Aufleiten) muss man nach der Kettenregel den Faktor b berücksichtigen, der als Faktor der Amplitude a zur Seite gestellt wird:

$$f'(x) = a \cdot b \cdot \cos(b(x-c))$$

ist die erste Ableitung der allgemeinen Sinusfunktion f, deren Stammfunktion F (mit Integrationskonstante C) hat die Funktionsgleichung:

$$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos(b(x-c)) + d \cdot x + C$$

1.3 Andere Schreibweise der allgemeinen Sinusfunktion

Schließlich weise ich noch darauf hin, dass manche Autoren die allgemeine Sinusfunktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c^*) + d$$

schreiben. Vorteilhaft ist hierbei, dass man sich eine Klammer spart. Aber der Parameter c^* hat eine gänzlich andere Bedeutung als bei mir. In beiden Schreibweisen sind a Amplitude, b (Kreis-)Frequenz, mit $b = \frac{2\pi}{T}$und Periodendauer T, und d

Mittelwert der Funktion (auch vertikale Verschiebung). Bei mir ist c direkt die Phasenverschiebung (horizontale Verschiebung nach rechts), also an der Stelle c steigt der Graph der Funktion an und hat den Funktionswert $f(c) = d$, wie die Standard-Sinus-Funktion im Ursprung ($\sin(0) = 0$ mit $c = d = 0$). Beim Parameter c^* ist nicht nur das Vorzeichen „falsch", d.h. es geht hier um eine Verschiebung nach links („in die Vergangenheit"), über die bei einer Messung (und Modellierung) i.d.R. keine Daten vorliegen, der Parameter c^* $(= -bc)$ sagt direkt auch nix über den Betrag der horizontalen Verschiebung aus. Hier ist der Graph um $\frac{c^*}{b}$ nach **links** verschoben. Man braucht hier also für die Phasenverschiebung die Angaben von c^* **und** b.

Natürlich sind i.A. „die Cs alle verschieden": $-\frac{c^*}{b} = c \neq c^* \neq C$ und $c \neq C$.