Sekt und Selters

Torsten Warncke

30. November 2018

1 Musterlösung zu Aufgabe 1: „Happy New Year“

Ein Champagnerglas hat im Querschnitt die Form einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (GRF2, Parabel). Das Glas hat oben einen Durchmesser von 5 cm und eine Tiefe von 15 cm. Wie viel Sekt oder Selters passt in das Glas hinein?
Tatsächlich sollen dem AB nach eine Reihe von Teilaufgaben gelöst werden, also der Reihe nach:

1.1 Eine Parabel

Bestimme die Funktionsgleichung für die Querschnittsparabel. (Tipp: Wähle den Nullpunkt im tiefsten Punkt der Parabel!)
Gesagt, getan, schieben wir den Querschnitt des Gefäßes so in das Koordinatensystem, dass der Tiefpunkt (Scheitelpunkt der Parabel) in $T(0|0)$ liegt. Damit genügt die Funktionsgleichung YAS, d.h. wir haben den Ansatz für die Funktionsgleichung $f(x) = a + b \cdot x^2$ und mit $T(0|0)$ reduziert sich der Ansatz auf $f(x) = b \cdot x^2$.
Zeichnerisch verfolgen wir den Prozess in der Abbildung 1. Standardmäßig zeichnen wir in ein 2D-Koordinatensystem (x-Achse rot, y-Achse grün, Sektglasquerschnitt schwarz) den Querschnitt des Glases mit den Punkten T und A.
Diese Steckbriefaufgabe ist trivial, denn wir müssen nur noch den oberen Randpunkt A des Querschnitts in den Ansatz einsetzen, $A(2{,}5|15) \Rightarrow x = 2{,}5 \wedge y = 15$ und lösen die triviale Gleichung:

$$y = b \cdot x^2 \Rightarrow 15 = b \cdot 2{,}5^2 \Rightarrow b = \frac{15}{2{,}5^2} = \frac{15}{6{,}25} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Die gesuchte Funktionsgleichung des Querschnitts lautet also $y = \frac{12}{5} \cdot x^2$. Würden wir nun den Funktionsterm um die y-Achse rotieren lassen hätten wir den Rand des Sektglases.
Leider haben wir aber nur eine Formel für die Rotation um die x-Achse:

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (g(x))^2 \, dx$$

wobei $g(x)$ den Rand des um die x-Achse rotierenden Randes beschreibt. Also müssen wir unser „Glas hinlegen“, so dass der Rand um die x-Achse rotiert. Mathematisch bedeutet dies, dass x und y in der Funktionsgleichung getauscht werden und wir dann nach dem neuen y umstellen. Dies ist auch das Standard-Verfahren um zu einer Funktion eine Umkehrfunktion zu finden, s.a. `http://www.warncke-family.de/g13/umkehrfunktion.pdf`.

1.2 Welche Funktion beschreibt die obere Hälfte der gekippten Querschnittsparabel

Wie gesagt benötigen wir hier die Umkehrfunktion $g(x)$ zu der in 1.1 bestimmten Funktion $f(x) = \frac{12}{5} \cdot x^2$. Wir bestimmen die Umkehrfunktion schrittweise:

- Funktion: $y = \frac{12}{5} \cdot x^2$
- x-y tauschen: $x = \frac{12}{5} \cdot y^2$
- nach y umstellen: $\pm\sqrt{\frac{5}{12} \cdot x} = y$
- Umkehrfunktion: $y = \sqrt{\frac{5}{12} \cdot x} = \sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{x}$

Dies ist die gesuchte Funktion $g(x) = \sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{x}$ die entlang der x-Achse verläuft und deswegen auch problemlos um die x-Achse rotieren kann, so dass maximal

$$V_{rot} = \pi \int_0^{15} (g(x))^2 \, dx \approx 147{,}26 \text{ cm}^3$$

eingeschenkt werden können. Dabei ist das Glas dann randvoll, also von der unteren Grenze ($x = 0$) bis zur oberen Grenze ($x = 15$) ist Sekt oder Selters im Glas (das wegen der Schwerkraft natürlich dazu wieder aufrecht stehen müsste).
In der Abbildung 1 ist im nun 3D-Koordinatensystem (zusätzlich dunkelblaue z-Achse) in dunkelgrün die Funktion $g(x)$ dargestellt, die durch Rotation um die x-Achse einen bläulichen Paraboloid abbildet, dessen Volumen mit der bekannten Formel berechnet wurde.

1.3 Einschenken

Der Wirt will pro Glas „nur" 1 dl Champagner ausschenken. Bis auf welche Höhe muss er das Glas jeweils füllen?
(Allgemeinwissen ist, dass 1 cm^3= 1 ml, 1 dl = 10 cl = 100 ml = 100 cm^3)
Dies bedeutet, dass nicht bis zum oberen Rand bei 15 cm eingeschenkt werden muss, sondern nur bis zu einer Höhe h, so dass gilt

$$100 = \pi \int_0^{h} (g(x))^2 \, dx = \pi \cdot (F(h) - F(0))$$

Solche Integrationsaufgaben können schwer sein, in diesem Fall ist es aber halb so wild, denn die Stammfunktion ist eher einfach: $g(x) = \sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{x}$ und somit ist der Integrand $g^2 = \frac{5}{12} \cdot x$ und folglich die allgemeine Stammfunktion $F(x) = \frac{5}{12} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{5}{24} \cdot x^2 + C$.
Es folgt die Gleichung $\frac{100}{\pi} = \frac{5}{24} \cdot h^2$ mit der Lösung $h = \sqrt{\frac{2400}{5\pi}} = 12{,}360774464742066570950167529968...$, also statt auf 15 cm müsste der Wirt auf rund 12,36 cm jedes Glas auffüllen, so dass 100 ml = 1 dl Champus eingeschenkt sind.

1.4 Eis

Um den Champagner zu kühlen wird in das Glas ein möglichst großer Eis-Zylinder eingelegt, der oben nicht über den Rand herausschauen soll. Berechne seine Höhe und sein Volumen. (Tipp: Hierbei handelt es sich um ein EWP.)
EWPs sind nicht mehr in, und dass das Eis nicht heraus schaut, wenn auch noch zu kühlende Flüssigkeit im Glas ist, ist physikalisch ziemlich unrealistisch („Spitze des Eisberges"). Dies ist also wieder so eine konstruierte Aufgabe, die ich wegen mangelnder Relevanz echt fleißigen SuS überlasse. (Nur soviel: man rechnet nun von rechts, denn der so definierte maximale Eiszylinder schließt mit dem rechten Rand des liegenden Glases ab und das Volumen $V(x)$ wird durch den parabelförmigen Rand je mehr beschränkt, desto größer die Höhe des Zylinders wird. Für das Maximum mit $V'(x) = 0$ sollten rund $h = 7{,}5$ cm $V = 73{,}6$ ml heraus kommen.)

1.5 Abb.

Die Abbildung fasst zusammen: erst in x-y das Problem abbilden und eine Funktion $f(x)$ bilden. Wenn f um die y-Achse statt um die x-Achse rotiert wird, muss man „die Funktion hinlegen", d.h. die Umkehrfunktion $g(x)$ bilden, die um die x-Achse rotiert. Dann kann die Formel $V_{rot} = \pi \int_a^b (g(x))^2 \, dx$ benutzt werden, wobei die Grenzen a,b auch entsprechend dem „Hinlegen" angepasst werden müssen. Wenn der Körper hier also aufrecht und in 2D einen Durchmesser von maximal 5 cm (Radius 2,5 cm) hat und eine Höhe von (max.) 15 cm, so hat er hingelegt nun eine maximale Höhe von 2,5 cm, läuft dafür aber von $x = 0$ bis $x = 15$ cm:

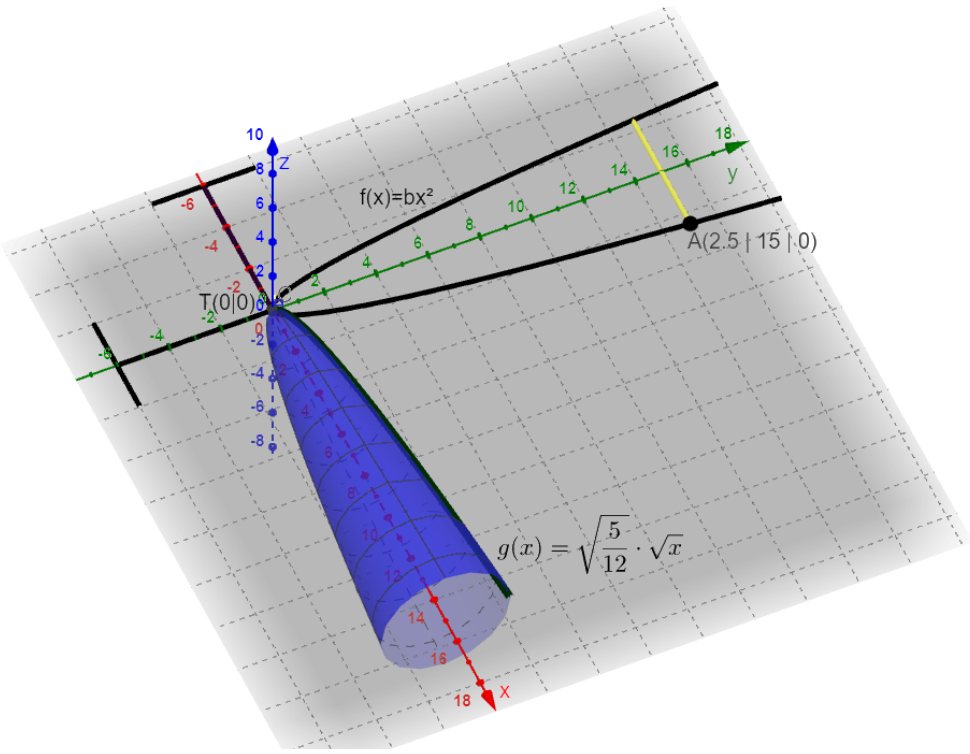

Abbildung 1: Sektglas in 2D aufrecht und 3D liegend