1 Gezeitenkraftwerk

Gegeben ist die Funktion $g(t) = 5 \cdot \cos(0{,}5 \cdot t)$, sie gibt den Wasserstand im Atlantik an, und zwar als Abweichung vom mittleren Wasserstand gemessen in Metern (m), t ist die Zeit in Stunden ab Mitternacht.

a) Bestimmen Sie, wann das erste Hoch- bzw. Niedrigwasser eintritt, wie viel Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Niedrigwassern vergeht. Bestimmen Sie, wie groß der Unterschied der Wasserstände zwischen Hochwasser und Niedrigwasser ist. Geben Sie für den ersten Tag an, in welchen Zeiträumen Ebbe (Absinken des Meeresspiegels) und in welchen Flut (Ansteigen des Meeresspiegels) herrschte.

Gemäß `http://www.warncke-family.de/g13/g13-Formeln.pdf` folgen:
- $H(0\,|\,5)$ ist der erste Hochpunkt der Funktion, d.h. bereits um Mitternacht (0:00 h) ist Hochwasser.
- Da $b = 0{,}5 = \frac{2\pi}{T}$ ist die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \approx 12{,}57$ Stunden lang, also tritt der Tiefpunkt zur Zeit $T/2 = 2\pi \approx 6{,}28$ Stunden nach Mitternacht ein, d.h. Niedrigwasser ist umgerechnet um etwa 6:17 Uhr (0,28 h·60 min/h≈ 17 min).
- Da die Amplitude $a = 5$ ist, ist der Unterschied der Wasserstände zwischen Hochwasser und Niedrigwasser $2a$= 10 Meter.
- Zwischen Hochwasser um Mitternacht und Niedrigwasser um etwa 6:17 Uhr ist Ebbe, zwischen Niedrigwasser um etwa 6:17 Uhr und erneutes Hochwasser um etwa 12:34 Uhr ist Flut. Dann ist wieder bis etwa 18:51 Uhr Ebbe und anschließend ist der Rest des Tages Flut.

1.1 Schnittpunkte und Differenzfunktion

b) Der Wasserstand im Staubecken wird in etwa von der Funktion h mit $h(t) = -1{,}16 \cdot t + 5{,}4$ wiedergegeben (t wieder in Std. und h in m). Die beiden Graphen g und h schneiden sich näherungsweise in den Punkten $P_1(1{,}5\,|\,3{,}7)$ und $P_2(7{,}8\,|\,-3{,}6)$. Weisen Sie dies für einen der Punkte nach!

Normalerweise würde man Schnittpunkte von 2 Funktionen mit dem Gleichsetzungsverfahren $g(t) = h(t)$ ermitteln bzw. Nullstellen der Funktion $f(t) = h(t) - g(t)$ bestimmen. Dies ist aber leider algebraisch gar nicht möglich und letztendlich nur numerisch bzw. über Taylorentwicklung (s.a. `http://www.warncke-family.de/g13/sinus_als_Reihe.xhtml`) möglich.
Entsprechend aufwändig (numerische Lösung der Gleichung $0 = -135 + 125\cos(t/2) + 29t$) würde man die Schnittstellen zu $t_1 \approx 0{,}45673676161519150348328 72$, $t_2 \approx 1{,}4971339411350802756255405$ und $t_3 \approx 7.7936247691598966544362853$ bestimmen. Einsetzen in $g(t)$ würde die y-Koordinaten der Schnittpunkte A,B,C ergeben: $A(0{,}4567367616151915034832872\,|\,4{,}8701853565263778559593868 5)$, $B(1{,}4971339411350802756255405\,|\,3{,}663324628283306880274373)$ und $C(7{,}7936247691598966544362853\,|\,-3{,}6406047322254801191460909)$ (s.a. Abb. 1.2 unten).
Es wird deutlich, dass im Rahmen einer Abi-Klausur diese Lösung nicht zu erwarten ist. Wenn man also nur eine der gegebenen x-Koordinaten in beide Funktionen g und h einsetzt, so ergeben sich näherungsweise die gleichen y-Koordinaten, was im Rahmen des Schulunterrichts ausreicht ($g(1{,}5) \approx h(1{,}5) \approx 3{,}66$ bzw. $g(7{,}8) \approx h(7{,}8) \approx -3{,}64$).

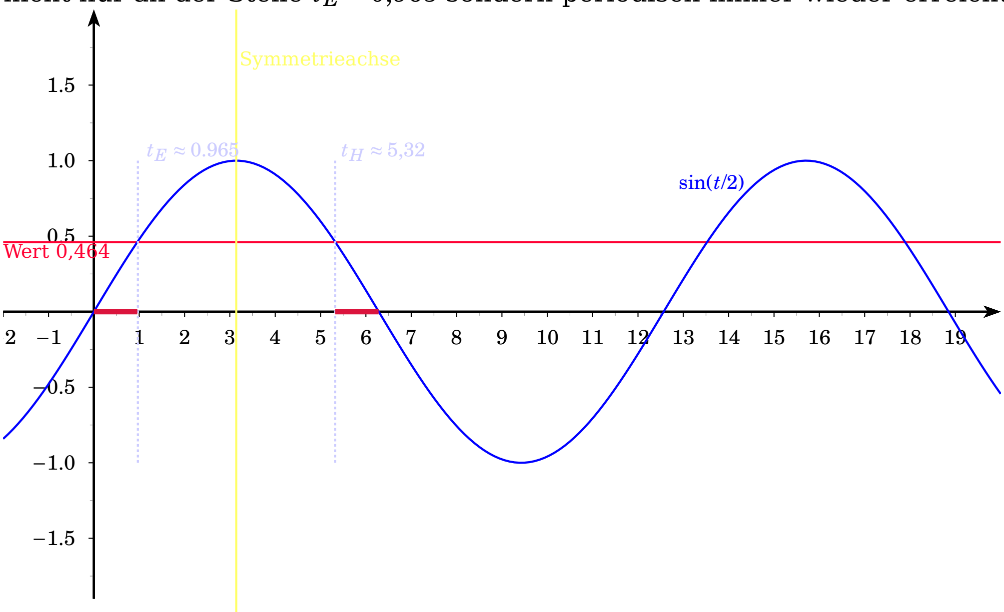
c) Für jeden Meter, den der Wasserstand im Atlantik tiefer oder höher liegt als im Staubecken, kann dieses Kraftwerk 1200 Kilowatt (kW) elektrische Leistung liefern. Die Differenz der Wasserstände kann man durch die Differenzfunktion f mit $f(t) = h(t) - g(t)$ im Intervall

$1{,}5 \le t \le 7{,}79$ angeben. Ermitteln Sie, wann das Kraftwerk seine größte Leistung erbringt, indem Sie zeigen, dass sich an der Stelle $t_H \approx 5{,}32$ das absolute Maximum des Graphen von f befindet. (Randmaxima brauchen hier nicht betrachtet zu werden.) Bestimmen Sie die maximale Leistung des Kraftwerks.

NBfE: $f'(t_E) = 0 = -1{,}16 + 2{,}5 \cdot \sin(0{,}5 \cdot t_E)$,

$$\begin{aligned}
0 &= -1{,}16 + 2{,}5 \cdot \sin(0{,}5 \cdot t) && \mid +1{,}16 \\
1{,}16 &= 2{,}5 \cdot \sin(0{,}5 \cdot t) && \mid : 2{,}5 \\
0{,}464 &= \sin(0{,}5 \cdot t) && \mid \sin^{-1} \\
\sin^{-1}(0{,}464) &= 0{,}5 \cdot t && \mid \cdot 2 \\
2 \cdot \sin^{-1}(0{,}464) &= t && \approx 0{,}96501079775078984261056629574469
\end{aligned}$$

Da $f''(t) = 1{,}25 \cdot \cos(0{,}5 \cdot t)$ und $f''(0{,}96501079775078984261056629574469) > 0$, liegt an dieser Stelle ein Minimum vor, wir suchen aber das Maximum im Bereich $1{,}5 \le t \le 7{,}79$.
Aus http://www.warncke-family.de/g13/g13-Formeln.pdf kennen wir auch einige Formeln (s. (9)$\rightarrow \sin(x/2) = \sin((2\pi - x)/2)$) und wissen, dass der Wert 0,464 der Funktion $\sin(0{,}5 \cdot t)$ nicht nur an der Stelle $t_E \approx 0{,}965$ sondern periodisch immer wieder erreicht wird (s. Abb.):

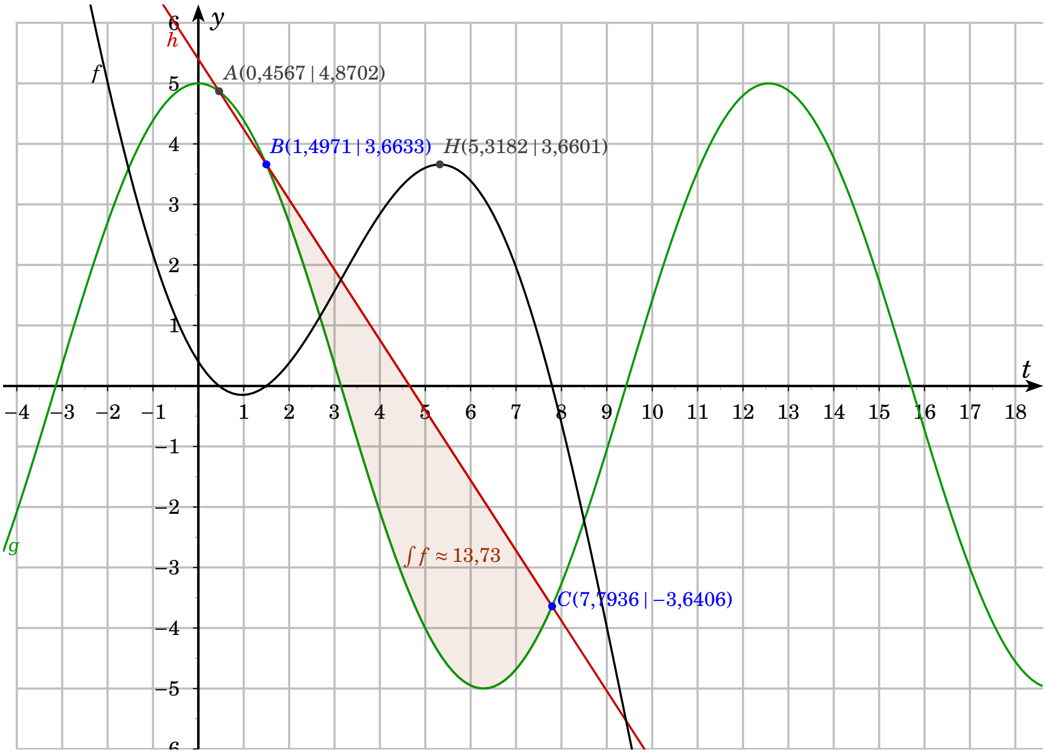


Aus obiger Abbildung erkennt man, dass wegen der Symmetrieachse bei $t_s = \pi$ der Wert 0,464 der Funktion $\sin(0{,}5 \cdot t)$ nicht nur an der Stelle $t_E \approx 0{,}965$ sondern insbesondere auch bei $t_H = 2\pi - t_E$ gilt. Es ergibt sich $t_H \approx 2\pi - 0{,}96501079775078984261056629574469 \approx 5{,}31817450942879663431472047$ und für diesen Zeitpunkt gilt nun auch $f''(t_H) < 0$.

D.h. die Funktion f hat (auf 2 Nachkommastellen gerundet) bei t_H einen Hochpunkt $H(t_H \mid f(t_H)) \approx (5{,}32 \mid 3{,}66)$. Der Hochpunkt wird auch in der folgenden Graphik abgebildet (Abb. 1.2).

1.2 Graphik

Graphisch ist alles klar:



Die Rechnung $3{,}66 \cdot 1200 = 4392$ kW liefert die maximale Leistung des Gezeitenkraftwerks.

1.3 Integral

d) Summiert man die Leistung eines Kraftwerks in kW (Kilowatt) über die Zeit (in Stunden), erhält man die erzeugte elektrische Energie in kWh (Kilowatt-Stunden). Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_{1,5}^{7,9} f(t)\,dt$ Veranschaulichen Sie diesen Wert in der Grafik. Bestimmen Sie die elektrische Energie, die in dem Zeitintervall vom Kraftwerk produziert wird.

$$\int_{1,5}^{7,9} f(t)\,dt = \Big[-0{,}58 \cdot t^2 + 5{,}4 \cdot t + 10 \cdot \sin(0{,}5 \cdot t)\Big]_{1,5}^{7,9} \approx 13{,}7318$$

In der Grafik ist dies von den beiden Funktionen f und g die zwischen den Schnittpunkten B und C eingeschlossene Fläche (rötlich eingefärbte Fläche in obiger Abb. 1.2). Den Wert mit 1200 multipliziert ergibt die gesuchte elektrische Energie: $13{,}732 \cdot 1200 \approx 16478$ kWh ist die täglich gewonnene elektrische Energie des Gezeitenkraftwerks.

Das war's.