TR-bezogene Hinweise zur Lösung von Abi-Aufgaben

Aufgabe 3 der letzten Klausur zur analytischen Geometrie

ist mittels geogebra auch ansprechend visualisiert: https://www.geogebra.org/m/jkrxvbr7
Das Trapez liegt anfangs am Boden, so dass die 3. Dimension vernachlässigt werden kann. Die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ können demzufolge 2-dimensional betrachtet werden:

a) Als LGS $\begin{bmatrix} -8r - 8s & = -6 \\ -5r + 5s & = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4r + 4s & = 3 \\ r \;\; - s & = 0 \end{bmatrix}$

b) Als Matrixaufgabe $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Oder als Schnittpunkt der Funktionen $s = -r + \frac{3}{4} \wedge s = r$

Zu a) Tippen wir dies in den GTR Casio fx-9750…(cfx-9850…) als
[AC/ON] [EQUA] [EXE] [F1] [F1] [4] [EXE] [4] [EXE] [3] [EXE] [1] [EXE] [(−)] [1] [EXE] [EXE]
so erhalten wir die Lösung des LGS als $r = s = 3/8$.

Zu b) hat dieser Kurs bislang nix gemacht, aber vom theoretischen Standpunkt ist es schon interessant. An der reduced row echelon form (**rref**) der erweiterten Koeffizientenmatrix erkennt man sofort, ob sich 2 Geraden schneiden, windschief, parallel oder identisch sind. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist hier $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Im GTR tippt man [AC/ON] [RUN·MAT] [EXE] [F1] (um In den ▸MAT/Matrix-Dialog zu kommen) [EXE] [2] [EXE] [3] [EXE] [EXE] [4] [EXE] [3] [EXE] [1] [EXE] [(−)] [1] [EXE] [EXIT] [EXIT] [OPTN] [F2] [F6] [F5] [F6] [F1] [ALPHA] [X,θ,T] [EXE] und schwupps stehen in der rechten Spalte der rref die Lösungen $r = s = 3/8$. Dies klappt aber auch in 3D, wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix eine 3x3-Matrix ist. Lässt man dann den mächtigen **rref**-Befehl wie eben auf die Matrix los, so gibt es allgemein die 4 Fälle:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sich schneidende Geraden mit Lösungen r, s

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ windschiefe Geraden

iii) $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ parallele Geraden

iv) $\begin{pmatrix} 1 & k & l \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ identische Geraden, wobei *k*,*l* allgemein reelle (insbesondere auch negative) Zahlen sind.

Da der GTR erlaubt ist, würde ich auch die entsprechende rref-Argumentation zulassen, sofern die Fragestellung nicht explizit etwas anderes fordert.

Zu c) würde sich auch anbieten, das Graphik-Teil des GTR anzuschmeißen. [GRAPH] [EXE] [−] [X,θ,T] [+] [3] [÷] [4] [EXE] [X,θ,T] [EXE] [F6]
Im Graphikdisplay sieht man dann vermutlich nur eine Gerade, weil das **V-Window** falsch ist. Also [F3] [0] [EXE] [1] [EXE] [▼] [▼] [0] [EXE] [1] [EXE] [EXE] [F6]
zeigt im Graphikdisplay dann die sich schneidenden Geraden. Mit [F5] [F5] erhalten wir den Schnittpunkt (ISECT steht für intersection=Schnittpunkt) als graphische Lösung (G-Solv):
$x = r = s = y = 3/8$.

And now something completely different …

Lang ist es her, da haben wir uns mit **Stochastik** und der **Binomialverteilung** beschäftigt. Wie geht noch „**Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse mit p=1/5:

A: „Von 25 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind genau 3 fehlerhaft.“

B: „Von 50 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft.“

C: „Von 200 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 30 und weniger als 50 fehlerhaft.“

Bestimmen Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die unter 250 zufällig ausgewählten Bildschirmen mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Geben Sie einen Term an für die Wahrscheinlichkeit, dass von 250 zufällig ausgewählten Bildschirmen alle Geräte fehlerfrei sind. **Beurteilen** Sie die folgende Aussage:

*Wird eine Stichprobe von Bildschirmen um einen zufällig ausgewählten Bildschirm ergänzt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Geräte fehlerfrei sind, nach der Ergänzung geringer als vorher.“***?**

In der Schule verwenden wir hierzu die Binomialverteilung, englisch: Binomial Probability Distribution, kurz BinomialPD, noch kürzer bpd. Dann ist P(**A**)= BinomialPD(3,25,1/5). Die Eingabe im GTR ist natürlich wieder fürchterlich:
[AC/ON] [RUN·MAT] [EXE] [OPTN] [F5] [F3] [F5] [F1] [3] [,] [2] [5] [,] [.] [2] [EXE]
Liefert das richtige Ergebnis 0.135768… also rund 13,6%.
Analog erhalten wir P(**B**)= BinomialCD(8,50,.2), mit CD für cumulative distribution, und tippen hierzu in den GTR [F2] [8] [,] [5] [0] [,] [.] [2] [EXE] und erhalten rund 30,7%. Zum Verständnis von **C** ist evtl. https://www.geogebra.org/m/UWeHazRe nützlich (die Normalverteilung erwartet uns vermutlich erst ab Abi2021). Mathematisch heißt dies $P(30<X<50)=P(X\leq49)-P(X\leq30)$, um die Fälle 31,32,33,…,49 einzuschließen. Entsprechend tippen wir in den GTR [F2] [4] [9] [,] [2] [0] [0] [,] [.] [2] [)] [−]
[F2] [3] [0] [,] [2] [0] [0] [,] [.] [2] [EXE] erhalten rund 90,76%.
Die Aussage ist übrigens richtig, da mit jedem weiteren Bildschirm die Wahrscheinlichkeit für <u>alle fehlerfreie Geräte</u> um den Faktor (1-p)=0,8 sinkt.

Für **kombinatorische** Probleme benötigen wir außerdem die Fakultät etc., die über [AC/ON] [RUN·MAT] [EXE] [OPTN] [F6] [F3] erreicht werden:
Für eine **Permutation** von z.B. 4 Personen auf 4 Plätze tippen wir 4!: [4] [F1] [EXE] und erhalten 24=1·2·3·4=4!.
Für eine **Variation** ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen z.B. einer Kugel), tippen wir z.B. [3] [F2] [2] für die 6 Möglichkeiten (12,13,21,23,31,32 — im Beispiel 2 Ziffern aus 3).
Für eine **Kombination** (z.B. 6 aus 49) brauchen wir den Binomialkoeffizient (Combination: choose r from n, nCr) für die Anzahl der Möglichkeiten und tippen [4] [9] [F3] [6] [EXE] für die berühmten 1,4 Millionen Möglichkeiten, **siehe auch in den Ressourcen bei itslearning mein Kombinatorikb.pdf.**

Binomial Partial Distribution again

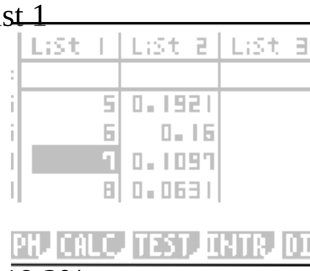
Zunächst ein kleiner Exkurs über das von mir gewissentlich vernachlässigte STAT-Menü.
Falls nötig kann man mit dem GTR auch ein Zufallsexperiment simulieren. Zum Beispiel: ein Würfelexperiment

Zu Berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim 30maligen Würfeln
a) 5-mal
b) X-mal
die 6 gewürfelt wird.

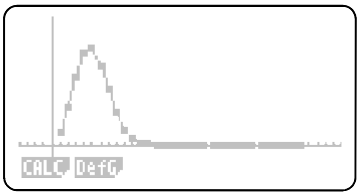
Hierzu kann man über das Menü auf STAT wechseln. Weiter mit
F5 (DIST) F5 (BINM) . Und entsprechend der Aufgabenstellung von a)
Einträge vornehmen: (ergibt rund 19,2%)

Ich würde normalerweise im Run/MAT-Menü die Berechnung vornehmen (wie zuvor auch)
mittels RUN EXE OPTN F5 F3 F5 F1 5 , 3 0 , 1 ÷ 6 EXE

Der Vorteil der STAT Anwendung zeigt sich bei der Aufgabenstellung b). Nun kann eine ganze Liste mit allen P(X=k) für k=0,1,2,…,30 erstellt werden. Hierzu wird zunächst die List 1 gefüllt, indem man mit dem Cursor (▲) auf den Spaltenkopf List 1 geht
und dann den Seq-Befehl benutzt: `Seq(` Formel,Variable,Start,End,Schrittweite)
hier F1 F5 X,θ,T , X,θ,T , 0 , 3 0 , 1 EXE (Seq(X,X,0,30,1))
dann geht man mit dem Cursor (▲ ▶) auf den Spaltenkopf List 2
und tippt OPTN F6 F6 F1 F1 F5 F1 OPTN F1 1 , 3 0 , 1 ÷ 6 EXE
um die Binomialverteilung auf die gesamte Liste 1 anzuwenden. In dem angezeigten Ausschnitt erkennen wir für k=5 den Wahrscheinlichkeitswert 0.1921 für obige rund 19,2% (aus a) wieder.



Ein weiterer Vorteil ist, dass nun bis zu 3 Graphen aus den Daten dargestellt werden können, z.B. als typisches Histogramm (Säulendiagramm) oder Scatterplot. Hierzu mit F1 F6 den Graphen StatGraph1 setzen, für das Histogramm Graph Type: HIST, als XList: List1 und für die Frequency: List2 auswählen. Mit Exit zurück und F1 fragt nach den Einstellungen, wobei mit Start:0 und Width:1 ein vernünftiges Histogramm der gesamten Verteilung dargestellt wird. Analog kann man mit F2 (GPH2) sofort einen voreingestellten Scatterplot darstellen:



Vermutlich reicht dies bzw. man wird eh nicht hierauf in der Arbeit zurück greifen, deswegen besser nun 3 kurze Beispiele aus der **Analysis** mit dem RUN·MAT-Menü und dann die Zusammenfassung der Essentials.

1.) f(x)=x kreist um die x-Achse, berechne das Rotationsvolumen zwischen x=0 und 5:
$\pi \int_0^5 x^2 dx$: SHIFT EXP OPTN F4 F4 X,θ,T x² , 0 , 5 EXE ergibt rund 130 VE.

2.) Berechne $\int_1^2 x^5 e^{-x} dx$: OPTN F4 F4 X,θ,T ^ 5 × SHIFT ln −
X,θ,T) , 1 , 2 EXE ergibt rund 1,916.

3.) Berechne die Steigung von f(x)=x² in x=3: OPTN F4 F2 X,θ,T x² , 3 EXE ergibt 6.

Aus der Kurzanleitung zur Bedienung der FX-9750GII folgt eine **Übersicht häufig benutzter Befehle des GTR:**

Beschreibung	**Befehlssyntax**	**Tastenfolge**
Absolutbetrag der Zahl X	**Abs** X	OPTN F6 (►) F4 (NUM) F1
Binomialkoeffizient	Zahl **nCr** Zahl	OPTN F6 (►) F3 (PROB) F3
Determinante der Matrix X	**Det** Matrix X	OPTN F2 (MAT) F3
Diagonalisieren der Matrx X	**Rref** Matrix X	OPTN F2 (MAT) F6 (►) F5
Differential	**d/dx(**Term,Differentiations-stelle)	OPTN F4 (CALC) F2
Dimension der Matrix X	**Dim** Matrix X	OPTN F2 (MAT) F6 (►) F2
Einheitsmatrix: Erstellen einer KxK-Einheitsmatrix	**Iden** K	OPTN F2 (MAT) F6 (►) F1
Fakultät	X**!**	OPTN F6 (►) F3 (PROB) F1
Funktionsterm aufrufen	**Y** (z.B. Y1 oder Y2)	VARS F4 (GRPH) F1
Gleichung lösen, Nullstellen	**Solve(**Gleichung,Startwert) **SolveN(**Gleichung[,Variable])	OPTN F4 (CALC) F1
Größter gemeinsamer Teiler (ggT) der ganzen Zahlen A und B	**GCD(**A,B)	OPTN F6 (►) F4 (NUM) F6 (►) F2
Hyperbolische Funktionen, z.B. sinh	**sinh**	OPTN F6 (►) F2 (HYP) F1
Integer (ganzzahliger Teil der Zahl X)	**Int** X	OPTN F6 (►) F4 (NUM)
Integral	**∫dx(**Term,untere Grenze, obe-re Grenze)	OPTN F4 (CALC) F4
Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) der ganzen Zahlen A und B	**LCM(**A,B)	OPTN F6 (►) F4 (NUM) F6 (►) F3
Listeneinträge kumulieren: Liste gener-ieren aus den Partialsummen der Liste X.	**Cuml** List X	OPTN F1 (LIST) F6 (►) F6 (►) F3
Matrix erstellen und ggfs. einer Matrixvariablen X zuweisen	**[...]**→ Mat X	F4 (MATH) F1 (MAT)
Median der Elemente von Liste X.	**Med(**List X)	OPTN F1 (LIST) F6 (►) F4
Mittelwert der Elemente von Liste X.	**Mean(**List X)	OPTN F1 (LIST) F6 (►) F3
Permutation	Zahl **nPr** Zahl	OPTN F6 (►) F3 (PROB) F2
Potenzieren einer Zahl oder Matrix, z.B. Quadrieren	Matrix X^2	^
Runden der Zahl X	**Rnd** X	OPTN F6 (►) F4 (NUM) F4
Standardabweichung der Elemente der Liste N mit der Häufigkeit List M. Die Vor-einstellung für List M ist 1.	**StdDev(**List N[, List M])	OPTN F5 (STAT) F4
Summe der Elemente von Liste X.	**Sum** List X	OPTN F1 (LIST) F6 (►) F6 (►) F1
Verteilung, Binomial- (k: reelle Zahl oder Liste; n: Anzahl der Versuche; p:Erfolgswahrscheinlichkeit; P:Binomiale Wahrscheinlichkeit)	**BinomialPD(**k,n,p) **BinomialCD(**k,n,p) **InvBinomialCD(**p,n,P)	OPTN F5 (STAT) F3 (DIST) F5
Verteilung, Normal- (x: positive ganze Zahl; σ: Varianz; μ:Standardabweichung); Die Voreinstellung für σ,μ ist 1. Kommt vor Abi2021 nicht dran!	**NormPD(**x,σ,μ) **NormCD(**untereGrenze, obe-reGrenze,σ,μ) **InvNormCD(**Bereich,σ,μ)	OPTN F5 (STAT) F3 (DIST) F1
Zahlenfolge generieren	**Seq(**Term,Variable,Startwert, Endwert,Schrittweite)	OPTN F1 (LIST) F5
Zufallszahl ganzzahlig zwischen a bis b	**RanInt#(**a,b)	OPTN F6 (►) F3 (PROB) F4 (RAND) F2
Zufallszahl zwischen 0 und 1	**Ran#**	OPTN F6 (►) F3 (PROB) F4 (RAND) F1