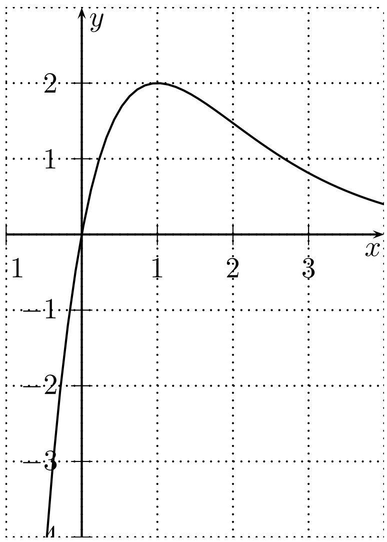
1 Vermischte Aufgaben, Lambacher/Schweizer, S. 213

LS führen auf S. 204 die wesentlichen Punkte einer Kurvendiskussion auf: Symmetrie, Nullstellen und Funktionswert an der Stelle Null, Extrema, Wendepunkte und Graph der Funktion. Für Extrema und Wendepunkte bestimmen wir zunächst die ersten drei Ableitungen, wobei nun auch Ketten- und Produktregel Anwendung finden.

1.1 7.a) $f(x) = 2x \cdot e^{1-x}$

Symmetrie: Weder YAS noch 0PS, da mit e^{-x}-Funktion.
Ableitungen:
Mittels Produktregel und Kettenregel finden wir: $u(\square) = e^{\square}$, $\square = 1 - x$, $u'(\square) = e^{\square}$, $\square'(x) = -1$, $u'(x) = -e^{1-x}$, $v(x) = 2x$, $v'(x) = 2$, also $f(x) = v(x) \cdot u(x)$, $f'(x) = v'(x) \cdot u(x) + v(x) \cdot u'(x) = 2 \cdot e^{1-x} + 2x \cdot (-e^{1-x}) = (2 - 2x) \cdot e^{1-x} = -2(x-1) \cdot e^{1-x}$. Analog erhalten wir $f''(x) = 2(x-2) \cdot e^{1-x}$ und $f'''(x) = -2(x-3) \cdot e^{1-x}$, alles mit Produktregel und Ausklammern der e-Funktion.[1]
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich über den Funktionswert an der Stelle Null: $f(0) = 0 \Rightarrow Y(0|0) \Rightarrow N(0|0)$. Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich über Nullstellen der Funktion : $f(x_N) = 0 \Rightarrow 0 = 2xN \cdot e^{1-x_N} \Rightarrow N(0|0)$ ist einzige Nullstelle der Funktion (e-Funktion wird nie Null, EPiNweFNi).
Extrema:
Notwendige Bedingung für Extrema ist $f'(x_E) = 0$, d.h. $0 = -2(x-1) \cdot e^{1-x}$. EPiNweFNi: -2 und e-Funktion sind nie Null, $x - 1$ wird Null, für $x_E = 1$. Einsetzen in f'' ergibt $f''(1) = 2(1-2) \cdot e^{1-1} = -2 < 0$, d.h. es liegt ein Hochpunkt bei $x_H = 1$ vor. Wir setzen x_H noch in f ein, um den y-Wert des Hochpunktes zu bestimmen: $f(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1-1} = 2$, d.h. $H(1|2)$.



Wendepunkte:
Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist $f''(x_w) = 0$, d.h. $0 = 2(x-2) \cdot e^{1-x}$. EPiNweFNi: 2 und e-Funktion sind nie Null, $x - 2$ wird Null, für $x_w = 2$. Einsetzen in f''' ergibt $f'''(2) = 2(2-3) \cdot e^{1-2} \neq 0$, d.h. es liegt ein Wendepunkt bei $x_w = 2$ vor. Wir setzen x_w noch in f ein, um den y-Wert des Wendepunktes zu bestimmen: $f(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{1-2} = \frac{4}{e} \approx 1{,}47$, d.h. $W(2|1{,}47)$.

1.2 7.c) $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$

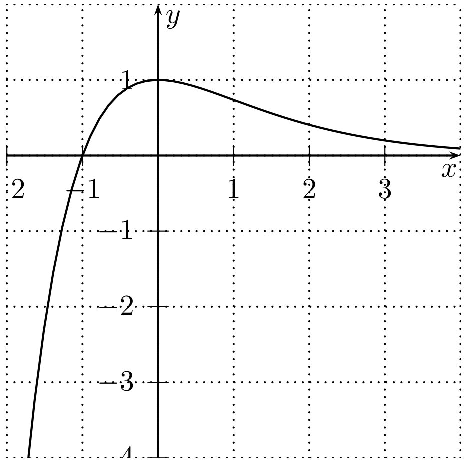
Ableitungen:
Mittels Produktregel und Kettenregel finden wir: $f'(x) = -xe^{-x}$, $f''(x) = (x-1)e^{-x}$ und $f'''(x) = -(x-2)e^{-x}$ wobei wir wieder die e-Funktion ausklammern.[2]
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich über den Funktionswert an der Stelle Null:

[1] Du hast richtig geraten, wenn Du annimmst, dass die vierte Ableitung $2(x-4) \cdot e^{1-x}$ wird.
[2] Du hast richtig geraten, wenn Du annimmst, dass die vierte Ableitung $(x-3) \cdot e^{-x}$ wird.

$f(0) = 1 \Rightarrow Y(0|1)$. Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich über Nullstellen der Funktion : $f(x_N) = 0 \Rightarrow 0 = (x_N + 1) \cdot e^{-x_N} \Rightarrow N(-1|0)$ ist einzige Nullstelle der Funktion (e-Funktion wird nie Null, EPiNweFNi).

Extrema:

Notwendige Bedingung für Extrema ist $f'(x_E) = 0$, d.h. $0 = -x \cdot e^{-x}$. EPiNweFNi: e-Funktion wird nie Null, $x_E = 0$. Einsetzen in f'' ergibt $f''(0) = (0-1) \cdot e^{-0} = -1 < 0$, d.h. es liegt ein Hochpunkt bei $x_H = 0$ vor. Wir setzen x_H noch in f ein, um den y-Wert des Hochpunktes zu bestimmen: $f(0) = (0+1) \cdot e^{-0} = 1$, d.h. $H(0|1)$.



Wendepunkte:

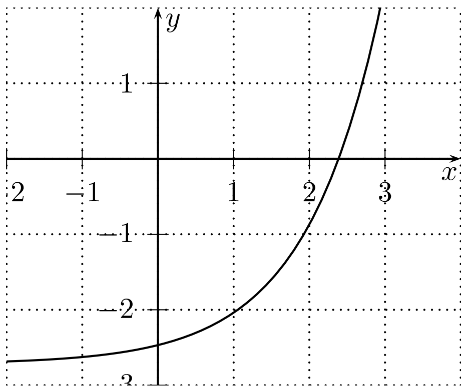
Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist $f''(x_w) = 0$, d.h. $0 = (x-1) \cdot e^{-x}$. EPiNweFNi: e-Funktion wird nie Null, $x - 1$ wird Null, für $x_w = 1$. Einsetzen in f''' ergibt $f'''(1) = -(1-2) \cdot e^{-1} \neq 0$, d.h. es liegt ein Wendepunkt bei $x_w = 1$ vor. Wir setzen x_w noch in f ein, um den y-Wert des Wendepunktes zu bestimmen: $f(1) = (1+1) \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$, d.h. $W(1|0{,}74)$.

Weder YAS noch 0PS.[3]

1.3 10.a) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - e$

Der Graph von f begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche A. Skizzieren Sie den Graphen und berechnen Sie A.

In dieser Aufgabenstellung ist das Kurvendiskussionsprogramm teilweise versteckt. Offenbar muss man die Achsenschnittpunkte berechnen, und für die Fläche muss man aufleiten können. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich über den Funktionswert an der Stelle Null: $f(0) = 0.25 - e \approx -2{,}468281828459 \Rightarrow Y(0 \mid -2{,}47)$. Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich über Nullstellen der Funktion : $f(x_N) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{4} \cdot e^{x_N} - e| + e, \Rightarrow e = \frac{1}{4} \cdot e^x| \cdot 4$, $\Rightarrow 4e = e^x | \ln \Rightarrow \ln(4e) = x_N \approx 2{,}38629 \Rightarrow N(2{,}39|0)$. Offenbar muss man für die gesuchte Fläche A die Funktion von 0 bis x_N integrieren.



Wir wissen, dass die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - e$ die Funktion $F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x - e \cdot x + C$ ist, was wir durch Ableiten leicht überprüfen können. Für die Fläche gilt dann: $A = -\int_0^{\ln(4e)} \frac{1}{4} \cdot e^x - e dx = -\frac{1}{4} \cdot e^{\ln(4e)} + e \cdot \ln(4e) - (-\frac{1}{4}) = e \cdot (\ln(4e) - 1) + \frac{1}{4} \approx 4{,}01833877$ (vgl. Skizze).

In gleicher Weise lassen sich die Flächen der Teilaufgaben 10.b-d) berechnen: 10.b) $A \approx 0{,}39$, 10.c) $A \approx 2{,}54$ und 10.d) $A \approx 0{,}65$.

[3] Für alle diese Funktionen gilt, dass keine Symmetrie erkennbar ist. Erst wenn eine gerade Potenz von x im Exponenten auftaucht, wie bei $f(x) = e^{-x^2}$, kann auch wieder YAS oder 0PS auftreten.