Elemente der Mathematik

EdM

Niedersachsen

11./12. Schuljahr
Grundlegendes und erhöhtes Niveau

Herausgegeben von
Heinz Griesel, Andreas Gundlach, Helmut Postel, Friedrich Suhr

Vorbereitung auf das Abitur: **Sinusfunktionen**

Schroedel

9.5 Sinus- und Kosinusfunktionen

9.5.1 Bleib fit in Sinus- und Kosinusfunktionen

Zum Aufwärmen

1 Der Arm eines Industrieroboters ist so gelagert, dass er eine Bewegung auf einem Kreis mit dem Radius 1 (gemessen in m) um einen Mittelpunkt M ausführen kann.
In der Ebene, in der dieser Kreis liegt, wählen wir ein Koordinatensystem so, dass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt. Dann kann man die Position P des Endpunktes in einfacher Weise mithilfe von Koordinaten beschreiben.
Gesucht ist die Abhängigkeit der Position P vom Drehwinkel α des Armes gegenüber (dem positiven Teil) der Rechtsachse des Koordinatensystems.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, die jedem Drehwinkel α von 0° bis 360° die Höhe der Position P über der Rechtsachse (also die 2. Koordinate v von P) zuordnet. Ermitteln Sie den Funktionsterm.

b) Zeichnen Sie den entsprechenden Graphen für die 1. Koordinate u von P. Ermitteln Sie den Funktionsterm.

2

a) Ermitteln Sie die Winkel α, für die gilt: $\sin\alpha = 0{,}4$

b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung: $\sin x = -0{,}7$

3

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, ohne den GTR zu verwenden:
(1) $f(x) = 2\cdot\sin(x) - 1$ (2) $f(x) = -\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ (3) $f(x) = 1{,}5\cdot\sin(x+1)$
Kontrollieren Sie anschließend mit dem GTR.

b) Beschreiben Sie, wie man die Graphen aus dem der Sinusfunktion enthalten kann.

4 Eine Feder schwingt so um die Ruhelage bei 0 cm, dass die größte Auslenkung 3,2 cm ist und diese nach 1,5 s wieder erreicht wird. Nehmen Sie sinusförmigen Verlauf an.

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen, der die Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung.

b) Welche Auslenkung hat die Feder nach 4 s?

c) Wann befindet sie sich das erste Mal bei der Auslenkung −2,5 cm; wann das nächste Mal?

Zur Erinnerung

Größen kann man in verschiedenen Einheiten messen:

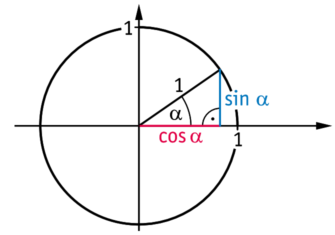
Länge:
Meter ↔ inch

Temperatur:
Grad Celsius
↔
Grad Fahrenheit

Winkel:
Gradmaß
↔
Bogenmaß

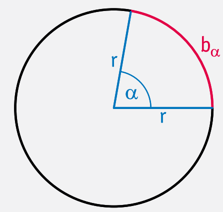
(1) Bogenmaß eines Winkels

Ursprünglich sind sin und cos für Winkel als Längenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definiert. Damit man zeitliche Verläufe mit der Sinus- oder Kosinusfunktion modellieren kann, benötigt man das Bogenmaß eines Winkels.



Definition 1

Das Verhältnis $\frac{b_\alpha}{r}$ aus der Länge b_α des Kreisbogens und dem Radius r heißt das **Bogenmaß** des Winkels α.



Beispiele

Gradmaß	360°	180°	90°	60°	45°	30°	1°
Bogenmaß	$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180}$

Satz 1

(1) Zu dem Gradmaß α eines Winkels gehört das Bogenmaß $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$.

(2) Zu dem Bogenmaß x eines Winkels gehört das Gradmaß $\alpha = x \cdot \frac{180°}{\pi}$.

Beispiele

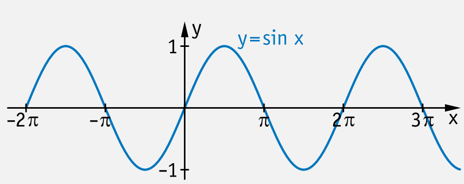
(1) $\alpha = 152°$; $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°} = 152° \cdot \frac{\pi}{180°} \approx 2{,}65$ (2) $x = 5{,}1$; $\alpha = x \cdot \frac{180°}{\pi} = 5{,}1 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 292{,}2°$

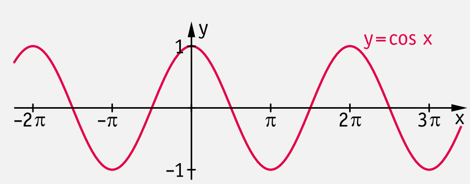
(2) Sinus- und Kosinusfunktion

Zur Beschreibung periodischer Vorgänge verwendet man Sinus- und Kosinusfunktionen nicht mit Winkelgrößen im Gradmaß sondern mit reellen Zahlen aus Ausgangsgrößen.

Definition 2

Die Funktion mit der Gleichung $y = \sin x$ und $\mathbb{R}$ (bzw. einer Teilmenge von $\mathbb{R}$) als Definitionsmenge heißt **Sinusfunktion**. Ihr Graph heißt auch *Sinuskurve*.
Die Funktion mit der Gleichung $y = \cos x$ und $\mathbb{R}$ (bzw. einer Teilmenge von $\mathbb{R}$) als Definitionsmenge heißt **Kosinusfunktion**. Ihr Graph heißt auch *Kosinuskurve*.





Die Wertemenge ist jeweils die Menge aller reellen Zahlen, für die gilt: $-1 \le y \le 1$.

Besondere Werte:

$\sin 0 = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	$\sin\pi = 0$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$	$\sin(2\pi) = 0$
$\cos 0 = 1$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\cos\pi = -1$	$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$	$\cos(2\pi) = 1$

Satz 2: Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion

- Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind periodische Funktionen mit der Periode 2π:
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$
- Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
  Für alle Winkelgrößen x gilt: $\sin(-x) = -\sin x$
- Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
  Für alle Winkelgrößen x gilt: $\cos(-x) = \cos x$

Den Graphen der Kosinusfunktion kann man durch Verschieben parallel zur x-Achse aus dem der Sinusfunktion erhalten. Beispielsweise gilt:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Zur Erinnerung

(3) Bestimmen von Winkelgrößen zu vorgegebenen Sinuswerten

Wegen der Periodizität gehören zu einem vorgegebenen Sinus- oder Kosinuswert unendlich viele Winkelgrößen.

Beispiel

Gesucht sind die Winkelgrößen, für die gilt:

(1) $\sin x = 0{,}9$ (2) $\sin x = -0{,}8$ (3) $\cos x = 0{,}7$ (4) $\cos x = -0{,}5$

Mithilfe des Rechners erhalten wir Näherungswerte für jeweils eine gesuchte Winkelgröße, die wir auf Zehntel gerundet angeben:

(1) $x_1 = 1{,}1$
(2) $x_1 = -0{,}9$
(3) $x_1 = 0{,}8$
(4) $x_1 = 2{,}1$

```
sin⁻¹(0.9)
      1.119769515
sin⁻¹(-0.8)
      -.927295218
```

```
cos⁻¹(0.7)
      .7953988302
cos⁻¹(-0.5)
      2.094395102
```

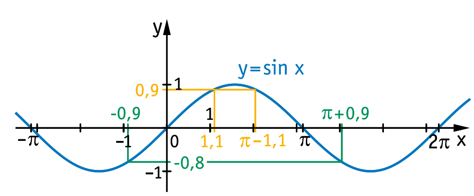
Weitere Werte erhalten wir mithilfe der Symmetrieeigenschaften der Graphen.

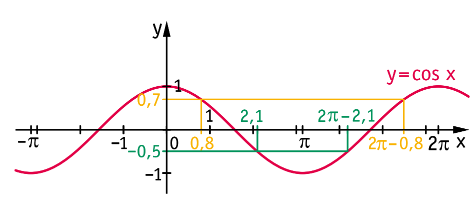
(1) Aus $\sin(\pi - x) = \sin x$ folgt:
$x_2 = \pi - 1{,}1 \approx 2{,}0$

(2) Aus $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ folgt:
$x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 0{,}9 \approx 4{,}0$

(3) Aus $\cos(2\pi - x) = \cos x$ folgt:
$x_2 = 2\pi - 0{,}8 \approx 5{,}5$

(4) Aus $\cos(2\pi - x) = \cos x$ folgt:
$x_2 = 2\pi - 2{,}1 \approx 4{,}2$





Da die Sinus- und Kosinusfunktion periodische Funktionen mit der Periode 2π sind, erhält man alle Lösungen, indem man zu den Lösungen im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ ganzzahlige (auch negative) Vielfache von 2π addiert:

(1) $x = 1{,}1 + k \cdot 2\pi$ oder $x = \pi - 1{,}1 + k \cdot 2\pi$
(2) $x = -0{,}9 + k \cdot 2\pi$ oder $x = \pi + 0{,}9 + k \cdot 2\pi$
(3) $x = 0{,}8 + k \cdot 2\pi$ oder $x = 2\pi - 0{,}8 + k \cdot 2\pi$
(4) $x = 2{,}1 + k \cdot 2\pi$ oder $x = 2\pi - 2{,}1 + k \cdot 2\pi$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Allgemeine Sinusfunktion

Graph der allgemeinen Sinusfunktion mit $y = a \cdot \sin\big(b\,(x + c)\big) + d$

Aus dem Graphen der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ erhält man den Graphen zur allgemeinen Sinusfunktion mit $y = a \cdot \sin\big(b\,(x + c)\big) + d$ durch

(1) Strecken mit dem Faktor a parallel zur y-Achse;

(2) anschließendes Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ parallel zur x-Achse;

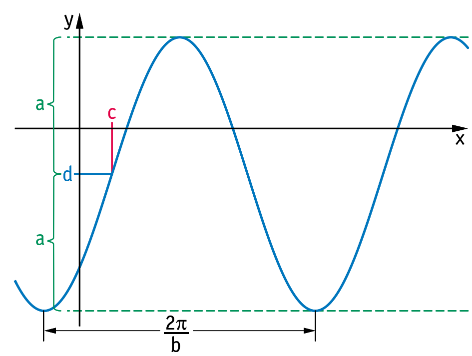
(3) anschließendes Verschieben um $|c|$ parallel zur x-Achse;
wenn $c < 0$, wird nach rechts verschoben; wenn $c > 0$, wird nach links verschoben;

(4) anschließendes Verschieben um $|d|$ parallel zur y-Achse;
wenn $d > 0$, wird nach oben verschoben; wenn $d < 0$, wird nach unten verschoben.

Beachten Sie:
Löst man z. B. im Funktionsterm $\sin\big(2\big(x + \frac{\pi}{4}\big)\big)$ die Klammern auf, so erhält man den einfacheren Funktionsterm $\sin\big(2x + \frac{\pi}{2}\big)$. Aus diesem kann man aber die Verschiebung parallel zur x-Achse nicht unmittelbar ablesen.

Bestimmen des Funktionsterms aus dem Graphen

Auf folgende Weise kann man mögliche Werte für die Parameter einer allgemeinen Sinusfunktion mit dem Funktionsterm $f(x) = a \cdot \sin\big(b\,(x + c)\big) + d$ aus dem Graphen ermitteln:

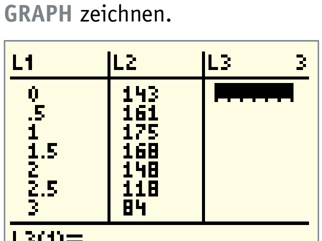


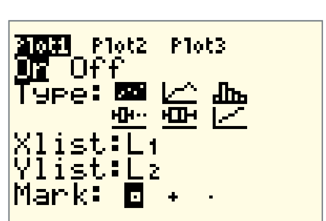
Zunächst bestimmt man den größten Funktionswert *(Maximum)* und den kleinsten Funktionswert *(Minimum)*.
Dann gilt für die Parameter:

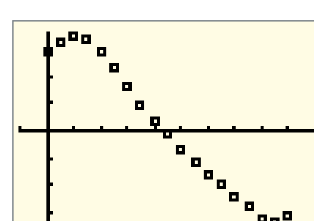
d: Mittelwert aus Maximum und Minimum
a: halbe Differenz von Maximum und Minimum
c: Gegenzahl der ersten positiven Stelle, an der der Funktionswert d beträgt und der Funktionsgraph ansteigt
b: Quotient aus 2π und der Periodenlänge

(5) Anpassen einer Sinusfunktion mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners

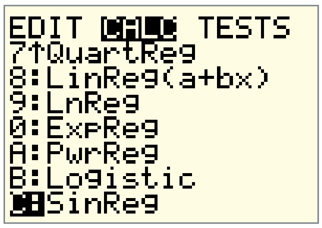
Mit dem GTR kann man, ähnlich wie bei den Regressionsgeraden für lineare Funktionen, möglichst gut passende allgemeine Sinusfunktionen bestimmen. Dazu werden zunächst die Koordinaten der Messpunkte mit dem Befehl **STAT**, dort im Menü **EDIT**, und dort im Untermenü **Edit** in zwei Listen, z. B. L1 und L2 eingegeben.
Mit dem Befehl **STATPLOT** kann man einen Plot der Werte festlegen. Anschließend vereinbart man mit dem Befehl **WINDOW** ein geeignetes Fenster zum Zeichnen der Werte und lässt die Punkte mit dem Befehl **GRAPH** zeichnen.

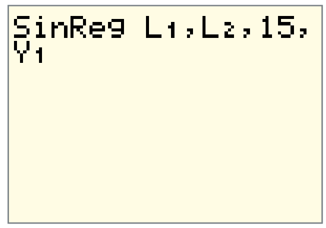


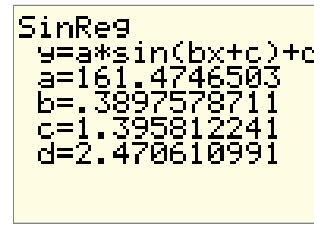




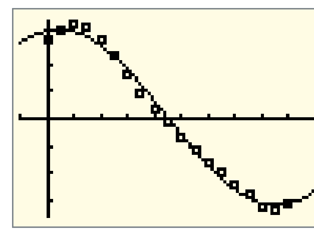
Das Bestimmen der Funktionsgleichung einer allgemeinen Sinusfunktion erfolgt mithilfe des Befehls **SinReg**; diesen findet man mit dem Befehl **STAT**, dort im Untermenü **CALC**. Bei diesem Befehl muss als erstes die Liste der 1. Koordinaten der Messpunkte (hier L1) und als zweites die Liste der zweiten Koordinaten (hier L2) angegeben werden. Danach sollte die Periode angegeben werden. Zum Schluss wird die Variable angegeben, in der der Funktionsterm gespeichert werden soll (hier Y1). Auf dem Bildschirm erscheinen dann die Koeffizienten des Funktionsterms, den man auch im **Y=**-Menü nachlesen kann.







Nach dem Befehl **GRAPH** wird dann der Graph der gefundenen allgemeinen Sinusfunktion durch die Messpunkte gezeichnet, sodass man einen Eindruck von der Güte der Anpassung gewinnt.



Zum Trainieren

5 Vergleichen Sie den Graphen der Funktion f mit dem der Funktion mit $y = \sin x$.

a) $f(x) = \sin(2x)$ **c)** $f(x) = 3 \cdot \sin x$ **e)** $f(x) = \sin\left(2(x - \pi)\right)$

b) $f(x) = \sin(x - \pi)$ **d)** $f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - 1$ **f)** $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$

6 Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion ohne einen GTR zu verwenden.

a) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $f(x) = \sin\left(2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right)$ **g)** $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ **e)** $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **h)** $f(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **f)** $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$ **i)** $f(x) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

Bestimmen Sie auch die Periodenlänge und die Nullstellen. Kontrollieren Sie dann mit dem GTR.

7 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion ohne einen GTR zu verwenden. Beschreiben Sie, wie der Graph aus dem der Sinusfunktion entsteht.

a) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{1}{2}$ **c)** $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1$

b) $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + \pi)\right) + 1$ **d)** $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) + 1$

8 Vergleichen Sie die Graphen von:

a) $f_1(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $f_2(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f_1(x) = \sin(x) + \pi$, $f_2(x) = \sin(x + \pi)$

c) $f_1(x) = 2\sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$

9 Bestimmen Sie eine allgemeine Sinusfunktion f, die die angegebenen Werte hat.

a)

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1	0	−1	0

b)

x	0	3	6	9	12
f(x)	0	1	0	−1	0

c)

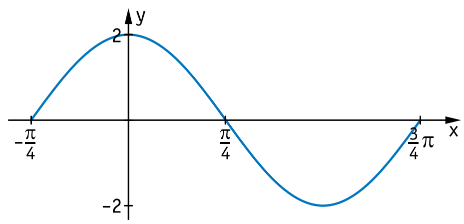
x	1	3	5	7	9
f(x)	0	1	0	−1	0

d)

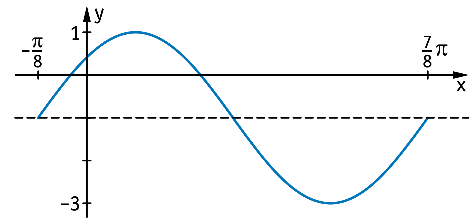
x	1	2	3	4	5
f(x)	1	3	1	−1	1

10 Geben Sie zum Graphen den Term der allgemeinen Sinusfunktion [Kosinusfunktion] an.

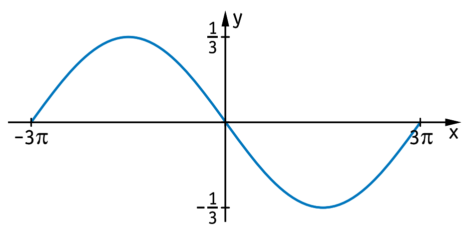
a)



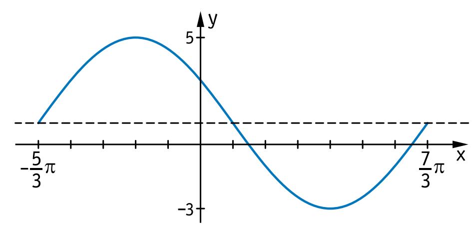
c)



b)



d)



11 Im *Statistischen Jahrbuch für die Bundesrepublik Deutschland* sind die mittleren Temperaturen für verschiedene Orte abgedruckt; es handelt sich dabei um Mittelwerte aus 30 Beobachtungsjahren.
Tragen Sie die angegebenen Messwerte für *einen* (selbst gewählten) Ort in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie eine allgemeine Sinusfunktion, die die mittlere Temperatur während eines Jahres möglichst gut beschreibt. Geben Sie Gründe an, weshalb eine allgemeine Sinusfunktion passt. Berechnen Sie mithilfe des gefundenen Funktionsterms die „theoretischen" Temperaturmittelwerte im Modell und vergleichen Sie sie mit den tatsächlich gemessenen Temperaturen.

	Mittlere Lufttemperatur in °C												
Beobachtungsstation	Nov.	Dez.	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Jahr
List auf Sylt	6,0	3,0	0,9	0,4	2,3	5,9	10,5	14,3	15,8	16,3	14,0	10,2	8,3
Greifswald	4,5	1,3	−0,7	−0,5	2,1	6,2	11,1	15,8	16,7	16,5	13,3	9,0	7,9
Travemünde	5,0	1,9	0,1	0,2	2,8	6,4	11,1	15,1	16,4	16,2	13,5	9,5	8,2
Hannover	5,0	2,0	0,5	0,7	3,7	7,7	12,3	15,8	17,0	16,6	13,5	9,4	8,7
Potsdam	4,1	0,8	−1,0	−0,3	3,3	7,9	12,9	16,7	17,9	17,4	13,9	9,1	8,6
Leipzig	4,5	1,4	−0,5	0,1	3,4	7,8	12,5	16,4	17,8	17,3	13,8	9,2	8,6
Frankfurt/M.	4,8	1,7	0,5	1,7	5,0	9,2	13,6	17,1	18,6	17,9	14,5	9,4	9,5
Trier	4,7	1,7	0,8	1,9	5,0	8,5	12,6	15,8	17,4	16,7	14,0	9,5	9,1
Regensburg	3,0	−0,6	−2,2	−0,6	3,4	8,0	12,6	16,3	17,7	16,9	13,4	8,1	8,0
Freiburg/Breisgau	5,7	2,5	1,5	2,9	6,5	10,1	14,3	17,5	19,5	18,8	15,8	10,6	10,5

12 Unter der astronomischen Sonnenscheindauer versteht man die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang. Der 50. Breitengrad verläuft durch die Bundesrepublik, z. B. durch die Stadt Mainz. Für Orte dieser geografischen Breite beträgt die astronomische Sonnenscheindauer ungefähr:

Datum	22.6.	22.7.	22.8.	22.9.	22.10.	22.11.	22.12.	22.1.	22.2.	22.3.	22.4.	22.5.
Dauer (in h)	16,2	15,4	13,8	12,0	10,2	8,6	7,8	8,7	10,3	12,2	13,9	15,4

a) Bestimmen Sie eine allgemeine Sinusfunktion, die die astronomische Sonnenscheindauer für Orte auf dem 50. Breitengrad gut annähert.

b) Bestimmen Sie mithilfe von Teilaufgabe a) die astronomische Sonnenscheindauer auf dem 50. Breitengrad am 10. Juli.

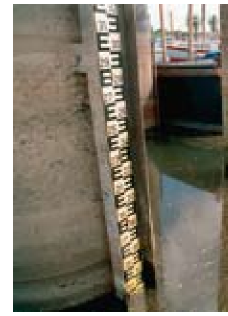
9.5.2 Modellieren mit Sinus- und Kosinusfunktionen

Aufgabe

1 Änderungsrate

Die Wassertiefe eines Kanals ändert sich mit Ebbe und Flut. Die erste Messung erfolgte bei Flut, die folgenden jeweils eine Stunde später.

Zeit (in h)	Tiefe (in m)
0	20,0
1	19,5
2	18,1
3	16,3
4	14,3
5	12,8
6	12,0
7	12,3



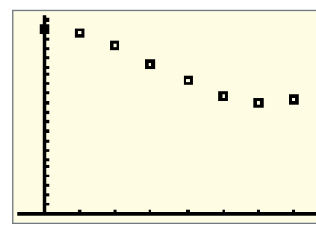
a) Erläutern Sie, warum diese Messungen reichen, wenn man den Vorgang durch eine trigonometrische Funktion beschreiben will. Ermitteln Sie eine entsprechende Kosinusfunktion.

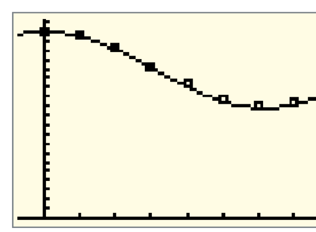
b) Ermitteln Sie die Tiefe nach 17,5 Stunden. Untersuchen Sie, wann ein Schiff nicht durch den Kanal fahren darf, wenn es mindestens 14,5 m Wasser unter dem Boden als Tiefgang benötigt.

c) Bestimmen Sie die größte Steiggeschwindigkeit des Wassers und den ersten Zeitpunkt, wann diese vorliegt. Interpretieren Sie das Ergebnis auch anhand der Tabelle oben.

Lösung

a) Die Tabellenwerte beginnen bei einem Maximum. Die Werte für die Tiefe fallen bis zum Zeitpunkt 6 Stunden, danach steigen sie wieder. In der Nähe von $t = 6$ muss also ein Tiefpunkt sein. Die Periode ist also ca. $2 \cdot 6$ Stunden $= 12$ Stunden. Genauere Werte kann man durch die grafische Darstellung der Werte enthalten. Man erkennt, dass der Tiefpunkt etwas rechts von $t = 6$ liegen müsste. Wir nehmen ein Minimum in $(6{,}2\,|\,11{,}8)$ an. Die Periode ist 12,4 Stunden. Eine Verschiebung in t-Richtung braucht nicht berücksichtigt zu werden, wenn man mit einer Kosinusfunktion modelliert.



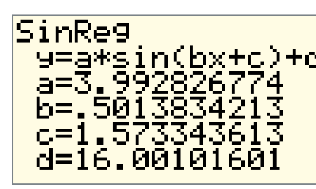


Sinnvoll ist ein Ansatz: $y = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{12{,}4} \cdot x\right) + d$. d ist der Mittelwert aus 20 und 11,8, also 15,9. Ferner ist $a = \frac{20 - 11{,}8}{2} = 4{,}1$.

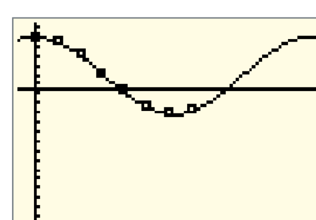
Eine Funktion, die den Vorgang beschreibt, hat also den Term

$f(x) = 4{,}1 \cdot \cos(0{,}507\,x) + 15{,}9$.

Man sieht, dass der Graph die Daten gut annähert.



Bestimmt man einen Funktionsterm mithilfe der Sinus-Regression, erhält man nahezu identische Werte für die Streckung in senkrechter Richtung, die Streckung in waagerechter Richtung und für die Verschiebung in senkrechter Richtung. Nur in t-Richtung ergibt sich für die Sinusfunktion eine zusätzliche Verschiebung von $1{,}57 \approx \frac{\pi}{2}$.



b) Nach 17,5 Stunden ergibt sich $f(17{,}5) = 12{,}4$, also eine Tiefe von 12,4 m. Im Vergleich zur Geraden mit der Gleichung $y = 14{,}5$ erhält man das Ergebnis: Zwischen ca. 3,9 Stunden und 8,6 Stunden ist die erforderliche Tiefe nicht gegeben.

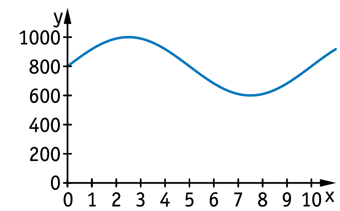
c) Die Steiggeschwindigkeit ergibt sich durch die momentane Änderungsrate:
$f'(x) = 4{,}1 \cdot \left(-\sin(0{,}507\,x)\right) \cdot 0{,}507 = -2{,}08 \cdot \sin(0{,}507\,x)$. Sie ist maximal, wenn $\sin(0{,}507\,x) = -1$, also $-2{,}08 \cdot \sin(0{,}507\,x) = 2{,}08$ ist. Dies ist erstmalig der Fall, wenn gilt: $0{,}507\,x = \frac{3\pi}{2}$, d. h. nach ca. 9,3 Stunden. Zum Vergleich ergibt sich aus der Tabelle näherungsweise: Die größte Differenz zwischen zwei benachbarten Werten ist zwischen 3 h und 4 h: 16,3 m − 14,3 m = 2,0 m. Die größte Sinkgeschwindigkeit beträgt also ca. $-2\,\frac{m}{h}$. Aus Symmetriegründen wird die größte Steiggeschwindigkeit von ca. $2\,\frac{m}{h}$ zwischen 8,4 h und 9,4 h erreicht.

Aufgabe

2 Rekonstruktion des Bestandes

Vor dem Bau von Gezeitenkraftwerken werden in Modellen verschiedene Möglichkeiten für die Durchflussgeschwindigkeit des Wassers durch die Turbinen ausprobiert. In einem Modell ist diese Durchflussgeschwindigkeit so eingestellt, dass sie sinusförmig mit einer Periode von 10 Minuten zwischen den Werten $1\,000\,\frac{m^3}{min}$ und $600\,\frac{m^3}{min}$ schwankt. Berechnen Sie die in 5 Minuten und die in einer Stunde durchgeflossene Wassermenge. Interpretieren Sie die Werte.

Lösung



Als Mittelwert für die Geschwindigkeit ergibt sich $800\,\frac{m^3}{min}$.
Wir modellieren mit einer Funktion vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + d$;
dabei ist x die Zeit in Minuten, f(x) die Geschwindigkeit in $\frac{m^3}{min}$.
Eine Verschiebung in Richtung der Zeitachse brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Wir beginnen mit dem Datenpaar (0|800). Um den Wert 800 ist die Sinuskurve nach oben verschoben. Der Streckfaktor muss dann 200 betragen. Der Parameter b ist $\frac{2\pi}{10}$, weil die Periode 10 ist.
Also ist $f(x) = 200 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot x\right) + 800$ der Funktionsterm.
Die durchgeflossene Wassermenge ergibt sich durch Integration. Im Zeitraum bis 5 Minuten ergibt sich:

$$\int_0^5 \left(200 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot x\right) + 800\right) dx = \left[\left(-200 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot x\right) \cdot \frac{10}{2\pi} + 800 \cdot x\right)\right]_0^5 = 4\,318{,}3 - (-318{,}3) = 4\,636{,}6$$

Die in 5 min durchgeflossene Wassermenge beträgt ca. $4640\,m^3$.

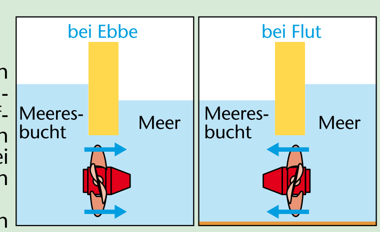
Entsprechend erhält man aus $\int_0^{60} f(x)\,dx = 48\,000$, dass in einer Stunde $48\,000\,m^3$ durchgeflossen sind.

Diese Werte kann man auch nachvollziehen: Eine Stunde enthält genau 6 Perioden, in denen pro Minute durchschnittlich $800\,m^3$ durchfließen, insgesamt also $800\,m^3 \cdot 60 = 48\,000\,m^3$.
In den ersten 5 Minuten müssen dagegen mehr als $800\,m^3 \cdot 5 = 4\,000\,m^3$ geflossen sein, denn die Geschwindigkeit ist in dieser Zeitspanne stets größer als die Durchschnittsgeschwindigkeit.

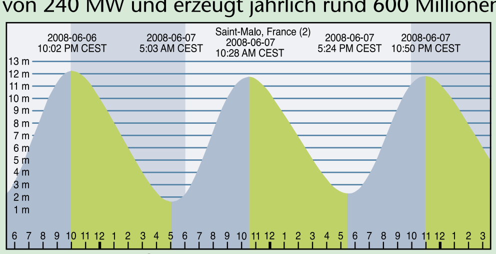
Übungsaufgaben

3

Gezeitenkraftwerke



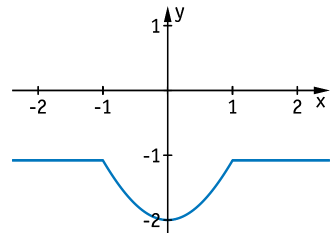
funktionieren nach dem Staudamm-Prinzip und werden an Meeresbuchten errichtet, die einen besonders hohen Tidenhub (Differenz zwischen Hoch- und Niedrigwasserstand) aufweisen. Dazu wird die entsprechende Bucht mit einem Deich abgedämmt. Im Deich befinden sich Wasserturbinen, die bei Flut vom einfließenden Wasser, bei Ebbe vom ausfließenden Wasser durchströmt werden.
Das erste und zur Zeit größte Gezeitenkraftwerk wurde von 1961 bis 1966 an der Atlantikküste in der Mündung der Rance bei Saint-Malo in Frankreich erbaut. Der Betondamm ist 750 Meter lang, wodurch ein Staubecken mit einer Oberfläche von 22 km² und einem Nutzinhalt von 184 Mio. m³ entsteht. Der Damm besitzt 24 Durchlässe, in denen jeweils eine Turbine mit einer Nennleistung von 10 MW installiert ist. Die gesamte Anlage hat somit eine Leistung von 240 MW und erzeugt jährlich rund 600 Millionen Kilowattstunden Strom.



L&P / 3127

Modellieren Sie den Verlauf des Wasserstandes mit einer geeigneten Sinuskurve. Bestimmen Sie damit die Funktion, die die Steig- und Sinkgeschwindigkeit des Pegels angibt. Welchen höchsten Wert hat diese?

4 Der Querschnitt eines Grabens kann beschrieben werden durch die Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot \cos x$ für $-1 \leq x \leq 1$ in einem lokalen Koordinatensystem mit der Einheit m.



a) Ermitteln Sie, wie steil die Böschung ist.

b) Bestimmen Sie die Größe der Querschnittsfläche.

c) Berechnen Sie, wie viel Wasser der Graben bei einem Wasserstand von 1 m auf einer Länge von 500 m fasst.

5 In Hannover wurden 2007 nebenstehende Sonnenscheinstunden pro Monat gemessen.

a) Erläutern Sie, warum es zweckmäßig ist, die Zahl der Sonnenscheinstunden pro Monat mit einer Funktion der Form $f(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, wobei t die Anzahl der Monate bedeutet, zu beschreiben.

b) Wählen Sie den Monat September für $t = 0$ und bestimmen Sie die Funktion aus den Daten der Nachbarmonate August und Oktober.

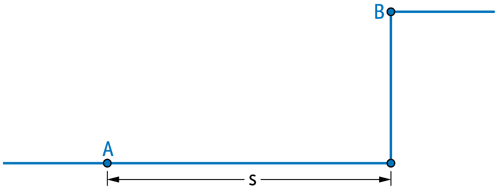
c) Ermitteln Sie jeweils den prozentualen Fehler zwischen den Werten im Modell und den gemessenen Werten für die Monate Mai und Dezember. Kommentieren Sie das Ergebnis.

d) In welchen Monaten scheint die Sonne nach diesem Modell mehr als 180 Stunden im Monat?

e) In welchem Monat ändert sich die Sonnenscheindauer pro Monat in dem Modell am stärksten?

f) Vergleichen Sie den Wert im Modell im gesamten Jahr 2007 mit dem realen Wert.

6 Eine Eisenbahnstrecke muss zur Überquerung eines Flusses einen Höhenunterschied von 6 m überwinden. Hierfür soll ein Übergangsprofil entwickelt werden. Das Schienenstück soll am Anfang und am Ende des Profils waagerecht in die Eisenbahnstrecke einmünden. Die maximale Steigung darf 2,4 % nicht übersteigen, weil sonst die Räder durchdrehen könnten.



a) Ermitteln Sie die kleinste Entfernung s zwischen dem Anfang des Anstiegs im Punkt A, damit im Punkt B die Brücke erreicht werden kann.

b) Das Profil soll durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. Ermitteln Sie die kleinste Entfernung s.

c) Das Profil soll durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades modelliert werden. Ermitteln Sie die kleinste Entfernung s.

d) Zur Herstellung des Profils muss für das Gleisbett auf 2 m Breite eine Schotter-Aufschüttung erfolgen.
Vergleichen Sie den Materialbedarf der drei Profile aus den Teilaufgaben a), b) und c).

7 In Hamburg St. Pauli betrug am 22.12.2009 der Pegelstand der Elbe um 2:38 Uhr bei Niedrigwasser 0,4 m und um 7:42 Uhr beim darauffolgenden Hochwasser 4,1 m.

a) Ermitteln Sie den Term einer trigonometrischen Funktion, die den Pegelstand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Zeichnen Sie den Graphen.

b) Wie hoch war der Pegelstand in diesem Modell am 22. 12. um 12 Uhr? In welchen Zeiträumen am 22. 12. war der Pegelstand höher als 3,00 m?

c) Ermitteln Sie die durchschnittliche Steiggeschwindigkeit des Pegels von 2:38 bis 7:42. Ermitteln Sie auch die größte Steiggeschwindigkeit in diesem Intervall.

8 Die Anzahl von Tieren einer Herde kann durch die Funktion f mit

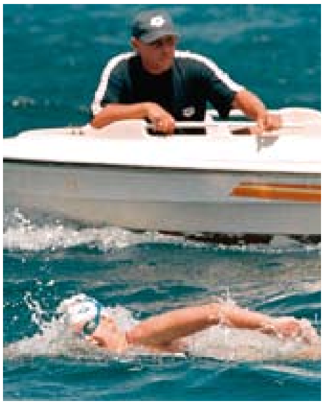
$$f(x) = 45 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 1000$$

beschrieben werden, wobei x die Anzahl der Monate ab dem 1. April bedeutet.

a) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen und erläutern Sie, warum er geeignet ist, den Bestand näherungsweise zu modellieren.
Ermitteln Sie die größte und die kleinste Anzahl von Tieren.

b) In welchen Zeiträumen wächst bzw. fällt der Bestand? Bestimmen Sie, wann und um wie viele Tiere pro Monat die Herde am schnellsten wächst bzw. abnimmt.

9 In einem Trainingsprogramm ändert eine Schwimmerin ihre Geschwindigkeit beim Schwimmen in einem großen See nahezu periodisch mit der Funktion $f(x) = 0{,}4 \cdot \sin(0{,}3x) + 1{,}6$; dabei ist x die Zeit in s und f(x) die Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$.



a) Skizzieren Sie den Graphen. Interpretieren Sie seinen Verlauf im Sachzusammenhang.

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit das erste Mal am größten ist.

c) Berechnen Sie die Strecke, die sie in 2 Minuten zurücklegt.
Ermitteln Sie einen Term, der die zurückgelegte Strecke nach t Sekunden angibt.

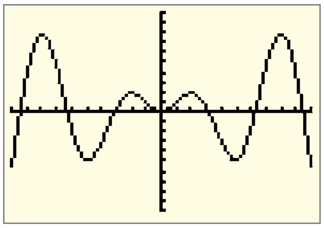
d) Erläutern Sie Veränderungen im Trainingsprogramm, wenn die Geschwindigkeiten mit folgenden Funktionen beschrieben würden. Skizzieren Sie die Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
$g(x) = 0{,}3\sin(0{,}3x) + 1{,}6$ $h(x) = 0{,}4\sin(0{,}3x) + 1{,}2$ $i(x) = 0{,}4\sin(0{,}3x) + 1{,}6 - 0{,}01x$
Berechnen Sie die Strecke, die von der Schwimmerin im jeweiligen Modell in 2 Minuten zurücklegt wird.

e) Ein Schwimmer krault in einem 25 m-Becken hin und her; pro Bahn benötigt er 16 s. Die Geschwindigkeit für die Hin-Richtung soll positiv gewertet werden, die andere negativ. Näherungsweise soll seine Geschwindigkeit durch eine Sinusfunktion beschrieben werden.
Ermitteln Sie eine Funktionsvorschrift und die maximale Geschwindigkeit. Berechnen Sie die Strecke, die der Schwimmer in 2 Minuten zurücklegt. Schätzen Sie zuerst und berechnen Sie dann genau.

9.5.3 Funktionsuntersuchungen

Aufgabe

1 Untersuchungen an einer Funktion



Rechts sehen Sie einen Ausschnitt des Graphen zu $f(x) = x \cdot \sin x$.

a) Begründen Sie die erkennbare Symmetrie-Eigenschaft des Graphen.

b) Zeichnen Sie mit dem GTR auch noch die Graphen zu $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ ein. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f mithilfe von g_1 und g_2.

c) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g_1 bzw. g_2.

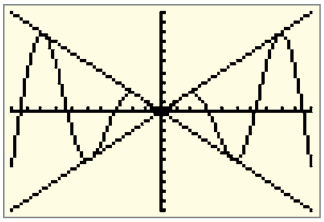
d) Marie behauptet: „Bei den gemeinsamen Punkten handelt es sich um die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f."
Untersuchen Sie, ob diese Behauptung zutrifft.

Lösung

a) Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da gilt:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\cdot\sin(-x) \\ &= -x\cdot(-\sin x) \\ &= x\cdot\sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Punktsymmetrie der Sinuskurve zum Ursprung



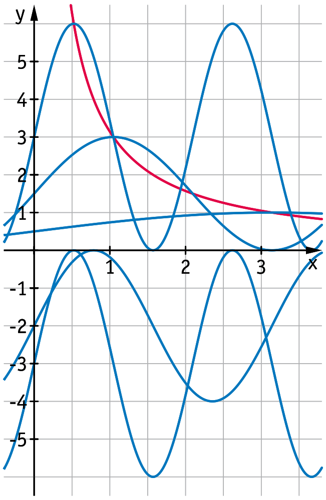
b) Der Graph von f pendelt zwischen den Graphen von g_1 und g_2 hin und her, dabei werden die Maxima umso größer, je größer $|x|$ ist.

c) Der Graph von f hat gemeinsame Punkte mit denen von g_1 bzw. g_2 an den Stellen, an denen gilt: $\sin x = 1$ oder $\sin x = -1$, also an den Stellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

d) Mit der Produktregel erhalten wir $f'(x) = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x$.
Für den gemeinsamen Punkt $P\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right)$ des Graphen von f mit dem von g_1 gilt: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 1$, d. h. in P berühren sich die Graphen von f und g_1, aber P ist kein Hochpunkt des Graphen von f, da $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$.

Aufgabe

2 Untersuchungen an einer Funktionenschar



a) Rechts sehen Sie verschiedene Graphen der Kurvenschar zu $f_k(x) = k\cdot\big(1 + \sin(kx)\big)$ für $k \neq 0$. Ermitteln Sie die Parameter für die dargestellten Graphen. Begründen Sie.

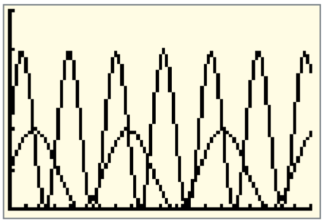
b) Für positive Werte des Parameters k liegen die 1. Hochpunkte rechts von der y-Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung.

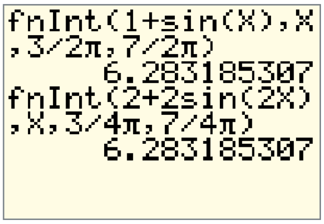
c) Zeichnen Sie die Graphen für $k = 1$ und $k = 2$. Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen.
Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für k auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Lösung

a) Für $x = 0$ ist $y = k$. Mann kann den Wert für k daher an der y-Achse ablesen. Abgebildet sind also die Graphen zu $f_{\frac{1}{2}}$, $f_{\frac{3}{2}}$, f_3, f_{-2} sowie f_{-3}.

b) Bei einem Hochpunkt muss eine waagerechte Tangente vorliegen, also muss $f_k'(x) = 0$ sein.
$f_k'(x) = k \cdot \cos(kx) \cdot k = 0$ also:
$\cos(kx) = 0$, da $k \neq 0$.
Dies ist das erste Mal erfüllt für $kx = \frac{\pi}{2}$, also $x = \frac{\pi}{2k}$. Nach k aufgelöst ergibt sich $k = \frac{\pi}{2x}$.
$f_k\left(\frac{\pi}{2k}\right) = k \cdot \left(1 + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2k}\right)\right) = k \cdot (1 + 1) = 2k$. Für die Ortslinie muss man den Parameter eliminieren, also ist $y = 2 \cdot \frac{\pi}{2x} = \frac{\pi}{x}$ die Gleichung der Kurve, auf der die Hochpunkte liegen.





c) Die Nullstellen bei $f_1(x) = 1 + \sin x$ ergeben sich als Lösungen der Gleichung $1 + \sin x = 0$.
Daraus folgt $\sin x = -1$, also $x = \frac{3}{2}\pi$. Wegen der Periode 2π ist die nächste Nullstelle bei $x = \frac{7}{2}\pi$.
Bei $f_2(x) = 2 + 2\sin(2x) = 0$ ist $\sin(2x) = -1$, also $2x = \frac{3}{2}\pi$; $x = \frac{3}{4}\pi$. Die Periode für $\sin(2x)$ ist $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Die nächste Nullstelle ist also $x = \frac{7}{4} \cdot \pi$.
Mit dem GTR ergibt sich für die Flächeninhalte jeweils 6,283…
Vermutlich sind beide Flächen gleich groß. Man kann das nachvollziehen: Bei doppelt so großem k wird die Periode halbiert, dafür verdoppelt sich aber die y-Koordinate des Hochpunktes. Das gilt auch für jeden anderen Faktor, mit dem man k multipliziert.
Zum Beweis berechnet man das Integral für allgemeines k:
Nullstellen sind: $k(1 + \sin(kx)) = 0$; daraus folgt $\sin(kx) = -1$, dies gilt für $kx = \frac{3}{2}\pi$; also $x = \frac{3}{2k} \cdot \pi$.
Die Periode für $\sin(kx)$ ist $\frac{2\pi}{k}$. Die nächste Nullstelle liegt also bei $x = \frac{7}{2k} \cdot \pi$.

$$\int_{\frac{3\pi}{2k}}^{\frac{7\pi}{2k}} k(1 + \sin(kx))\,dx = k \cdot \left[x - \frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{\frac{3\pi}{2k}}^{\frac{7\pi}{2k}} = \left(k \cdot \frac{7\pi}{2k} - \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right) - \left(k \cdot \frac{3\pi}{2k} - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{4\pi}{2} - 0 + 0 = 2\pi$$

Die Rechnung bestätigt die Vermutung.

Übungsaufgaben

3 Untersuchen Sie den Graphen zu $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ auf Besonderheiten. Beziehen Sie dabei auch die beiden Winkelhalbierenden des Koordinatensystems in Ihre Betrachtungen mit ein.

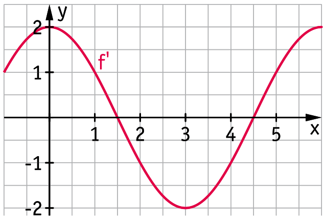
4

a) Untersuchen Sie den Graphen zu $f(x) = -0{,}5x + \pi - \sin x$ im Intervall $[0; 2\pi]$ auf Extrema. Zeichnen Sie den Graphen.

b) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion g dritten Grades, die an der Stelle π mit dem Funktionswert von f und deren Ableitungen mit den Werten der ersten drei Ableitungen von f übereinstimmen. Zeichnen Sie den Graphen von g.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g. Ermitteln Sie den größten Wert der Differenz der Funktionswerte von f und g.

5 Rechts ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt, deren Graph durch $P(1|2)$ verläuft. Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; 3]$.



6 Betrachten Sie den Graphen zu $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ im Intervall von 0 bis 4. Die Tangente im Hochpunkt bildet mit dem Graphen und der y-Achse eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

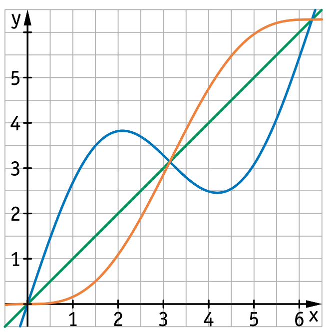
7

a) Untersuchen Sie den Graphen von f mit $f(x) = x \cdot \sin x$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ auf Extrema. Zeichnen Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x)$ und dem Graphen von $\sin x$.

c) Der Graph von $f(x)$ und die Graphen der Funktionenschar zu $g_a(x) = a \cdot \sin x$ bilden im Intervall $[0; \pi]$ zwei Flächen. Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den diese beiden Flächen den gleichen Inhalt haben.

8 Betrachten Sie die Funktionenschar zu $f_t(x) = x + t \cdot \sin x$ mit $t \in \mathbb{R}$.



a) Rechts sind drei Graphen der Schar abgebildet. Machen Sie begründet Aussagen über mögliche Werte von t.

b) Die drei Graphen schneiden sich in gemeinsamen Punkten. Untersuchen Sie, ob das für alle Graphen der Schar gilt.

c) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionenschar auf Extrema.

d) Berechnen Sie durch Integration den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f_t(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0; 2\pi]$. Berechnen Sie diesen Wert auch ohne Integration.

e) Untersuchen Sie, ob es einen Wert für t gibt, für den die Gerade zu $x = \pi$ diese Fläche halbiert.

9 Betrachten Sie die Funktionenscharen zu $f_a(x) = \frac{a}{4} \cdot \sin x$ und $g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin x$.

a) Untersuchen Sie die Graphen auf Nullstellen im Intervall $[0; 2\pi]$.

b) Untersuchen Sie, ob es Werte von a gibt, für die sich die beiden Graphen zu f_a und g_a berühren.

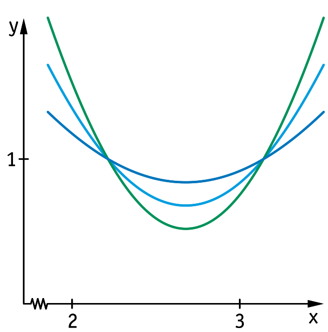
c) Berechnen Sie für $a = 2$ den Flächeninhalt A zwischen den beiden Graphen. Untersuchen Sie, ob es einen weiteren Parameterwert a gibt, für den die Fläche zwischen den beiden Graphen auch A beträgt.

10

a) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionenschar zu $f_t(x) = t \cdot \cos x - t^2$ in $[-\pi; \pi]$ auf Nullstellen.

b) Ermitteln Sie eine gemeinsame Eigenschaft der Tangenten in den Wendepunkten.

11 Gegeben ist die Funktionenschar mit dem Term
$f_t(x) = t \cdot \cos x - 0{,}5 \cdot t \cdot \sin x + t + 1$.
Rechts sehen Sie einen Ausschnitt der drei Graphen zu den Parameterwerten 1, 2 und 3. Entscheiden Sie, welcher Graph zu welchem Parameter gehört.
Alle Graphen der Kurvenschar scheinen sich in bestimmten Punkten zu schneiden. Untersuchen Sie diese Vermutung.



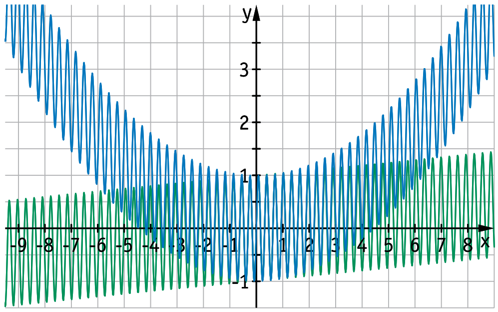
12 Der Graph zu $f(x) = a + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ schneidet die y-Achse bei 1, verläuft durch $P\left(\frac{\pi}{2} \middle| 3\right)$ und hat dort die Steigung 2.

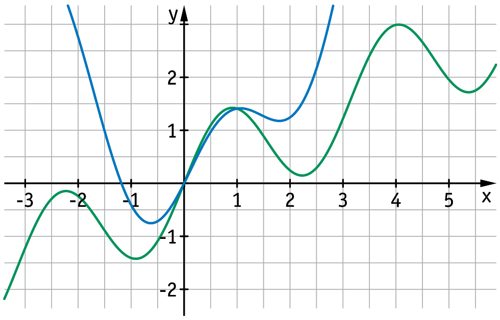
a) Berechnen Sie das Maximum der Funktion im Intervall $[0; 5]$ algebraisch.

b) Ermitteln Sie das Extremum im Intervall $[0; 5]$, wenn die y-Koordinate von P nicht 3 sondern 4 ist.

13 Betrachten Sie die Funktionenscharen zu $f_k(x) = kx + \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ und $g_k(x) = kx^2 + \sin\left(\frac{x}{k}\right)$.

a) Erläutern Sie die beiden Abbildungen. Bestimmen Sie den Verlauf der Graphen von f_k und g_k für $k \to \infty$.





b) Zeichnen Sie die Graphen für $k = 0{,}6$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche.

c) Untersuchen Sie die Graphen von f_k und g_k auf Nullstellen und Extrema. Skizzieren Sie Graphen von typischen Vertretern der Schar mit unterschiedlichen Eigenschaften.

d) Zeigen Sie, dass die Graphen beider Funktionenscharen für jeweils die gleichen Parameterwerte Schnittpunkte haben. Ermitteln Sie den Wert des Parameters, für den der Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche 2 beträgt.

e) Ermitteln Sie die Ortslinie der Wendepunkte von f_k.

f) Untersuchen Sie, ob die Graphen beider Funktionenscharen für jeweils gleiches k gemeinsame Tangenten im Ursprung haben.

14 Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (k^2 + 1)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)$ mit $k > 0$.

a) Zeichnen Sie die Graphen für $k = 1$ und $k = 2$. Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der x-Achse bilden.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für $k = 2$ und allgemeines k.
Untersuchen Sie, ob es Werte von k gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist.

c) Der Graph rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen zwei Nullstellen für $k = 2$. Untersuchen Sie, ob es ein kleinstes Volumen gibt, wenn man k variiert.

d) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster x-Koordinate.

15 Betrachten Sie die Funktionenschar zu $f_k(x) = kx + \cos x$ im Intervall $[0;\, 2\pi]$ mit $0 < k < 1{,}5$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte für $k = 0{,}1$. Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters k es Extrempunkte gibt.

b) Mit der Geraden zu $y = 1 - 0{,}5x$ bildet der Graph zu $f_{0,1}$ zwei Flächenstücke. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

c) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion g 2. Grades, die an den Stellen 3 und 4 die gleichen Funktionswerte wie $f_{0,1}$ hat und an der Stelle 2 die gleiche Steigung wie $f_{0,1}$. Zeichnen Sie den Graphen.
Bestimmen Sie die Stelle, an der die Differenz der Funktionswerte von $f_{0,1}$ und g den größten Wert annimmt.

d) Ermitteln Sie für beliebiges k die Gleichungen der Tangenten in den beiden Wendepunkten des Graphen von f_k.
Untersuchen Sie, ob sich die Tangenten jeweils für beliebiges k an der gleichen Stelle x schneiden.