Inhaltsverzeichnis

1 Kurvendiskussion

Der Verlauf einer Funktion lässt sich in seinen wesentlichen Zügen aus bestimmten charakteristischen Kurvenpunkten und Funktionsmerkmalen wie beispielsweise Nullstellen, Symmetrie, relativen Extremwerten, Wendepunkten und Asymptoten leicht erschließen. Kurvendiskussion bedeutet daher an dieser Stelle: Untersuchung und Feststellung der Funktionseigenschaften und des Funktionsverlaufs mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung. Die Diskussion einer Funktion erfolgt i.d.R. nach dem folgenden Schema:

- (Definitionsbereich)
- Symmetrie (gerade, ungerade Funktion)
- Schnittpunkte mit den Achsen: Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse
- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden)
- Ableitungen (in der Regel bis zur 3. Ordnung)
- Relative Extremwerte (Maxima und Minima)
- Wendepunkte, Sattelpunkte
- (Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen)
- (Wertebereich der Funktion)
- Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Maßstab
- (Ggf. zusätzlich Untersuchungen des Monotonie- und Krümmungsverhaltens)

EdM 12/13 GK S. 113 nennen die meisten dieser Punkte. Bei der Analyse von ganzrationalen und exponentiellen Funktionen fällt insbesondere der Punkt der Pole und Polgeraden weg und der Definitionsbereich ist einfach die Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Konkretisieren wir im Folgenden die Kurvendiskussion am Beispiel von
$\boxed{f(x) = x^2 \cdot e^{-x}}$ (s. S. 120, Nr. 10 h).

1.1 Symmetrie

Symmetrieverhalten wird nicht immer untersucht, aber wenn Symmetrie vorliegt, halbiert sie u.U. den Rechenaufwand zur Bestimmung von Eigenschaften und Funktionswerten. Die Funktion ist ein Produkt der Faktoren x^2 und e^{-x}. Letzterer Faktor (e^{-x}) ruiniert die mögliche Symmetrie des ersten Faktors. Also gibt es keine Symmetrie.

Probe: $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^x$ ist weder $f(x)$ noch $-f(x)$.

1.2 Schnittpunkte mit den Achsen

Um den Schnittpunkt mit der y-Achse Y zu erhalten muss lediglich $x = 0$ eingesetzt werden:

$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \Rightarrow Y(0|0)$.

Damit hat man zufälligerweise bereits eine Nullstelle $N(0|0)$. Um alle Schnittpunkte mit der x-Achse zu erhalten muss man alle Lösungen der Gleichung $0 = x_N^2 \cdot e^{-x_N}$ finden. Offenbar hat man hierzu $f(x_N) = 0$ gesetzt (NBfN). Von letzterem Faktor wissen wir, dass er nie null wird („e-Funktion wird nie null!“). Mit EPinweFni brauchen wir dann nur $0 = x_N^2$ lösen und sehen sofort die doppelte Nullstelle bei $x_N = 0$. Es bleibt damit bei dem einen Schnittpunkt mit der x-Achse:

$0 = x_N^2 \cdot e^{-x_N} \Rightarrow N(0|0)$

1.3 3 Ableitungen

Ableitungen sind oft nur das notwendigen Übel um Extrema (NBfE) und Wendepunkte (NBfW) zu bestimmen. Es ist aber wichtig, das auf- und ableiten gezielt zu üben, und darüberhinaus, können sie auch zur Beschreibung von Steigungen und Krümmungen notwendig sein. Die Ableitung der e-Funktion braucht hier nicht unbedingt die Kettenregel, aber die Produktregel ist hilfreich.

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Natürlich setzen wir $u(x) = x^2$ und erhalten $u'(x) = 2 \cdot x$, sowie $v(x) = e^{-x}$ mit dessen Ableitung $v'(x) = -e^{-x}$ (prinzipiell nach Kettenregel). Einsetzen in die Produktregel ergibt:

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} \cdot (2x - x^2)$.

Hierbei wurde e^{-x} als gemeinsamer Faktor der Summanden ausgeklammert, so dass man für weitere Ableitungen wiederum auf die Produktregel zurückgreifen kann. Nun setzt man $u(x) = (2x - x^2)$ und erhält $u'(x) = 2 - 2x$, $v(x)$ ist unverändert:

$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2 - 2x)e^{-x} + (2x - x^2) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2)$.

Bei dieser Umformung muss man sich etwas Platz auf dem Papier lassen und sich Ruhe & Zeit nehmen, damit man nicht durcheinander kommt. Da wir noch die dritte Ableitung bilden wollen, ist wichtig, dass man richtig rechnet und e^{-x} wieder als gemeinsamen Faktor aller Summanden ausklammert. Hat man dies geschafft, so können wir mit der Produktregel die 3. Ableitung bilden. Erneut müssen wir ein neues $u(x) = (x^2 - 4x + 2)$ bilden mit der Ableitung $u'(x) = 2x - 4$, während $v(x)$ erneut unverändert bleibt.

$\boxed{f'''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2x-4)e^{-x} + (x^2 - 4x + 2) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 6x - 6).}$

Hierbei war es nicht zwingend notwendig e^{-x} wieder als gemeinsamen Faktor aller Summanden auszuklammern, aber es sieht übersichtlicher aus.

1.4 Relative Extremwerte (Maxima und Minima)

Für relative Extrema gilt die notwendige Bedingung, dass die 1. Ableitung verschwindet. $\boxed{\text{NBfE: } f'(x_E) = 0}$. Also setzen wir die 1. Ableitung null und lösen die Gleichung: $\boxed{0 = e^{-x_E} \cdot (2x_E - x_E^2).}$

Tatsächlich ist dies ein Kinderspiel, denn nach EPinweFni haben wir $0 = (2x_E - x_E^2) = x_E \cdot (2 - x_E)$, da die e-Funktion ja nie null wird. Die quadratische Gleichung lässt sich auf vielerlei Art lösen. Hier ist es am einfachsten x_E auszuklammern und nach EPinweFni sind die beiden Lösungen $x_E = 0$ oder $2 - x_E = 0 \Longrightarrow x_E = 2$. Wir setzen x_E jeweils in die 2. Ableitung $f''(x)$ ein um die Art des Extremums zu bestimmen und schließlich noch in die Ausgangsfunktion $f(x)$ um die y-Werte zu erhalten.

$\boxed{x_E = 0 \Rightarrow f''(0) = e^{-0} \cdot (0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0 \Longrightarrow T(0|0)}$

Wir wussten bereits, dass an der Stelle $x = 0$ der Wert $y = 0$ ist, denn wir hatten bereits $Y(0|0)$ und $N(0|0)$ (als doppelte Nullstelle!) bestimmt, also ist dies ein Tiefpunkt $T(0|0)$.

$\boxed{x_E = 2 \Rightarrow f''(2) = e^{-2} \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = -2e^{-2} < 0 \Longrightarrow H(2|f(2))}$

Den Funktionswert müssen wir noch ausrechnen $f(2) = 2^2 \cdot 2^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54134113294645$. Der Hochpunkt ist also näherungsweise $H(2|0{,}541)$.

1.5 Wendepunkte

Für Wendepunkte gilt die notwendige Bedingung, dass die 2. Ableitung verschwindet. $\boxed{\text{NBfW: } f''(x_W) = 0}$. Also setzen wir die 2. Ableitung null und lösen die Gleichung: $\boxed{0 = e^{-x_E} \cdot (x_W^2 - 4x_W + 2).}$

Nach EPinweFni haben wir $0 = (x_W^2 - 4x_W + 2)$, was sich mit der pq-Formel lösen lässt. $p = -4$ und $q = 2$ ergibt die Lösungen $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}585786437626904951198311275790 3$ und $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4142135623730950488016887242097$. Einsetzen in die 3. Ableitung ergibt jeweils ungleich null: $f'''(x_1) \approx e^{-0{,}586} \cdot (-0{,}586^2 + 6 \cdot 0{,}586 - 6) \neq 0$ und $f'''(x_2) \approx e^{-3{,}414} \cdot (-3{,}414^2 + 6 \cdot 3{,}414 - 6) \neq 0$. Also haben wir 2 Wendepunkte bei etwa $W_1(0{,}586 \mid 0{,}586^2 e^{-0{,}586}) \approx (0{,}586 \mid 0{,}191)$ und $W_2(3{,}414 \mid 3{,}414^2 e^{-3{,}414}) \approx (3{,}414 \mid 0{,}384)$.

1.6 Asymptoten im Unendlichen

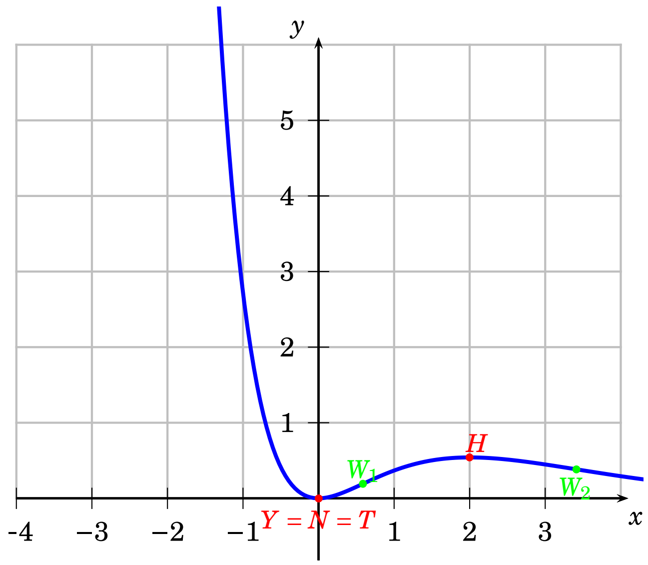
Das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ wird häufig nicht gefragt. Pragmatisch kann man in der Schulmathematik diese Frage klären indem man für $x = \pm 100$ einsetzt. Da wir uns mit e-Funktionen auskennen und wissen, dass diese das Verhalten für betragsmäßig große x dominiert, können wir damit begründen, dass für $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ und für $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 0$.

1.7 Wertebereich

Der Wertebereich (bzw. die Bild- oder Wertemenge $\mathbb{W}$) wird meist nicht gesondert gefragt. Da wir den Tiefpunkt $T(0|0)$ bereits bestimmt haben ist klar, dass die Funktion positiv definit ist, also nur Werte ≥ 0 kennt, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.

1.8 Zeichnung

Die Zeichnung muss dagegen meist sein und ist dank GTR ja fast ein Klacks. Sie enthält alle wichtigen Punkte. Schlaumeier werden frühzeitig den Graphen mit dem GTR plotten und Schätzwerte für T,H,W notieren, die die Rechnung bestätigen (oder zur Fehlersuche einladen).



Grundlegende Ableitungsformeln		
Konstantenregel	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
Potenzregel	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Summenregel	$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Kettenregel	$f(x) = g(\square)$	$f'(x) = g'(\square) \cdot (\square)'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Nützlich sind Verweise auf folgende Dokumente:
http://www.warncke-family.de/fos/funktion_01.pdf, http://www.warncke-family.de/fos/umkehrfunktion.pdf,
http://www.warncke-family.de/fos/Aufgaben_Kurvendiskussion.pdf, http://www.warncke-family.de/fos/kurvendiskussion_01.pdf,
http://www.warncke-family.de/fos/kurvendiskussion_02.pdf, http://www.warncke-family.de/fos/kurvendiskussion_03.pdf,
http://www.warncke-family.de/fos/kurvendiskussion_exp.pdf, http://www.warncke-family.de/fos/rattenschwanz.pdf,
http://www.warncke-family.de/g13/LS_233.pdf, http://www.warncke-family.de/g13/LS_213_analysis.pdf