1 S. 114 Nr. 4. d)

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x = (x^2 - 1) \cdot e^x = u(x) \cdot v(x)$$

Untersuche o.g. Funktion f und fertige eine Zeichnung an. Eine Standard-Funktionsuntersuchung umfasst die Skizze des Graphen der untersuchten Funktion, Zeichnung stellt noch etwas höhere Anforderungen, was ich aber nicht verlange. Ich habe in der Funktionsgleichung bereits grün und blau hervorgehoben, dass man diese Funktion mittels Produktregel ableiten muss. Die Kettenregel ist tatsächlich hier nicht notwendig, da $v(x)$ die primitive natürliche Exponentialfunktion ist. Der Reihe nach:

1. Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, d.h. es gibt keine Einschränkungen durch Pole oder dergleichen.

2. Symmetrie, weder YAS noch 0PS, denn $f(-x) \neq \pm f(x)$

3. $x \to \pm\infty$, für $x \to -\infty$ erwarten wir $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,
denn $f(-100) \approx 3{,}7197039684 \cdot 10^{-40} \approx 0$
für $x \to +\infty$ erwarten wir $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, denn $f(100) \approx 2{,}6878483301 \cdot 10^{47}$ ist „sehr sehr groß“

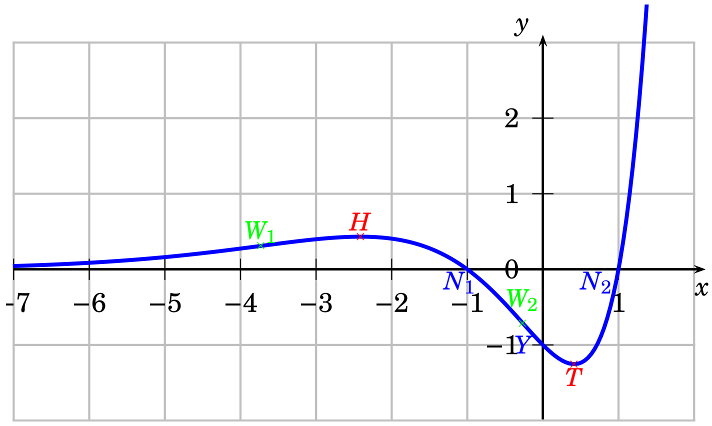
4. Schnittpunkte mit den Achsen
NBfY $x = 0$, für den Schnittpunkt mit der y-Achse setzen wir $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein und erhalten $f(0) = (0^2 - 1)e^0 = -1$, d.h. $Y(0|-1)$
NBfN $f(x_N) = 0$, für den Schnittpunkt mit der x-Achse ist etwas anspruchsvoller. Wir kennen aber den Satz vom Nullprodukt „EPinweFni“, „ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist“ und haben oben ja bereits $f(x)$ in die Faktoren $u(x)$, $v(x)$ zerlegt. Das Produkt ist wie gefordert null, wenn ein Faktor null ist. Da der Faktor e-Funktion $v(x)$ nie null wird, kann höchstens noch der Faktor $u(x)$ null werden: $x_N^2 - 1 = 0$. Dies ist eine einfache quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_{N1} = -1$ $x_{N2} = 1$, d.h. die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $N_1(-1|0)$ und $N_2(1|0)$.

5. Extrempunkte erfüllen NBfE $f'(x_E) = 0$
die Ableitung ergibt sich über die Produktregel
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$u'(x) = 2x$, $v'(x) = v(x) = e^x$, wie gesagt ist hier die Kettenregel für $v(x)$ nicht notwendig.
Einsetzen ergibt
$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 1) \cdot e^x$ Man erkennt (das nicht tot zu kriegende) e^x als Faktor in beiden Summanden, so dass man übersichtlicherweise e^x ausklammern kann:
$f'(x) = (2x + x^2 - 1) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$. NBfE $f'(x_E) = 0$ und EPinweFni führt analog den Nullstellen x_N zu der quadratischen Gleichung $x_E^2 + 2x_E - 1 = 0$, die sich z.B. mit pq-Formel lösen lässt: $x_{E1} = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}414$, $x_{E2} = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}414$. Die Art

der Extrema (ob Hoch- oder Tiefpunkt) entscheiden wir mit der 2. Ableitung. Analog der 1. bilden wir die 2. Ableitung: $f'(x) = (x^2+2x-1) \cdot e^x = u(x) \cdot v(x)$ mit altem $v(x) = e^x$ und neuem $u(x) = x^2+2x-1$ und neuem $u'(x) = 2x+2$, so dass $f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2x+2) \cdot e^x + (x^2+2x-1) \cdot e^x$. Die Kandidaten der Extrempunkte in die 2. Ableitung einsetzen ergibt $f''(-2{,}414) \approx -0{,}253 < 0$ also einen Hochpunkt und $f''(0{,}414) \approx 4{,}277 > 0$ also einen Tiefpunkt. Die y-Koordinaten erhalten wir durch Einsetzen in die Ausgangsfunktion $f(-2{,}414) \approx 0{,}4318$ und $f(0{,}414) \approx -1{,}2536$, also $H \approx (-2{,}41 \mid 0{,}43), T \approx (0{,}41 \mid -1{,}25)$ sind die Extrempunkte. Da wir sowieso als nächstes Wendepunkte berechnen macht es Sinn $f''(x) = (x^2+4x+1) \cdot e^x$ in Produktform zusammen zu fassen.

6. Wendepunkte erfüllen NBfW $f''(x_W) = 0$
die Ableitungen f'' und f''' bekommen wir wieder mittels Produktregel (s.o.), same procedure ..., $f'''(x) = (x^2+6x+5) \cdot e^x$, die Kandidaten der Wendepunkte erfüllen die Gleichung $x_w^2 + 4x_w + 1 = 0$, und die Lösungen $x_w = -2 \mp \sqrt{3}$ eingesetzt in die 3.Ableitung zeigt, dass die beiden Wendepunkte existieren, da $f'''(x_w) \neq 0$, und einsetzen in die Ausgangsfunktion f ergibt die y-Koordinaten $f(x_{W1}) = f(-2-\sqrt{3}) \approx f(-3{,}732) \approx 0{,}31$ und $f(x_{W2}) = f(-2+\sqrt{3}) \approx f(0{,}268) \approx -0{,}71$, so dass $W_1 \approx (-3{,}73 \mid 0{,}31)$ und
$W_2 \approx (-0{,}27 \mid -0{,}71)$.

7. Nach den Wendepunkten kommt bei EdM gleich die Zeichnung (mittels WT des TR, sowie alle zuvor bestimmten Punkte Y, N, T, H, W einzeichnen):



2 4. e)

4. e) ist eigentlich ganz analog zu 4. d). Nur zur Kontrolle: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
$f'(x) = -e^{-x} \cdot (-2+x) \cdot x \quad f''(x) = e^{-x} \cdot (2-4x+x^2)$ und $f'''(x) = -e^{-x} \cdot (6-6x+x^2)$. Damit ergibt sich $N = Y = T = (0|0)$, $H(2|f(2)) \approx (2|0{,}54134)$, $W_{1,2}(2 \mp \sqrt{2}|f(x_w))$,
$W_1 \approx (0{,}585786|0{,}191018)$, $W_2 \approx (3{,}41421|0{,}383537)$, usw.