Lineare Algebra (Zentralabitur 2009: Abibienen) (knappe Lösung)

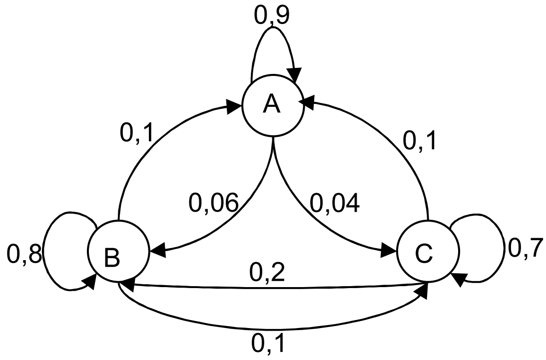
Abibienen

Ein aus den fleißigen Bienen mutierter Insektenstamm, die nachtaktiven „Abibienen", wurde im Jahr 2009 auf der Insel „Bremensia" über einen längeren Zeitraum von Abibienenforschern beobachtet:

Die 1200 Abibienen verteilten sich jeden Morgen gegen acht Uhr auf einen ihrer drei Erholungsplätze, genannt A, B, C.

Um das tägliche Wanderverhalten der Abibienen zwischen den drei Erholungsplätzen zu erforschen, fingen die Forscher alle 1200 Abibienen ein und versahen je ein Drittel von ihnen mit einer eindeutigen Markierung für jeweils einen der drei Plätze A, B oder C.

Am Morgen des $0.$ Tages ihrer Untersuchung setzten die Forscher je 400 Abibienen an den drei Erholungsplätzen entsprechend ihrer Markierungen aus. Nun zählten die Forscher am folgenden Morgen ($1.$ Tag), wie viele Abibienen zu ihrem Erholungsplatz zurückgekehrt und wie viele einen anderen Erholungsplatz aufgesucht hatten. Ihre Ergebnisse fassten sie im nebenstehenden Übergangsdiagramm zusammen.



Erstaunlicherweise fanden die Abibienenforscher auch an den weiteren Tagen das Übergangsdiagramm bestätigt. Gehen Sie daher im Folgenden davon aus, dass sich die Abibienen täglich entsprechend dem Übergangsdiagramm auf die drei Erholungsplätze verteilen.

a) Berechnen Sie anhand des Übergangsdiagramms, wie viele Abibienen am $1.$ Tag am Platz C gezählt wurden.

Betrachte alle bei C ankommenden Pfeile und gehe von den 400 Bienen an jedem Platz aus:

$$0{,}7 \cdot 400 + 0{,}1 \cdot 400 + 0{,}04 \cdot 400 = 336$$

Vervollständigen Sie die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}04 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & \dots & \dots \\ 0{,}20 & \dots & \dots \end{pmatrix}$ zu einer zum Übergangsdiagramm gehörigen Übergangsmatrix.

Die fehlenden Angaben sind aus dem Übergangsgraphen direkt ablesbar.

Es ist nur auf die Anordnung der Plätze zu achten:

von nach	C	A	B
C			
A			
B			

dann $U = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}04 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}06 & 0{,}80 \end{pmatrix}$

Erläutern Sie die Bedeutung der Werte in der ersten Zeile von U für das Wanderverhalten der

Abibienen.

70% der am Platz C befindlichen Bienen bleiben auch dort, vom Platz A wandern 4% zum Platz C und vom Platz B wandern 10% zum Platz C

Verwenden Sie im folgenden die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}70 \end{pmatrix}$, die ebenfalls das Wanderverhalten beschreibt.

b) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{v}_1 = M * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = M * \vec{v}_1$.

Berechnung mit Casio fx-991 ES

Matrix M als 3x3-Matrix eingeben, den Ausgangsvektor als 3x1-Matrix eingeben

Multiplikation der beiden Matrizen liefert Ergebnisvektor

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 440 \\ 424 \\ 336 \end{pmatrix}$$

diesen Ergebnisvektor ebenfalls als 3x1-Matrix abspeichern und erneut multiplizieren

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 472 \\ 432{,}8 \\ 295{,}2 \end{pmatrix}$$

[oder die beiden Vektoren „zu Fuß" gemäß den Rechenregeln der Matrizenmultiplikation bestimmen]

Geben Sie eine Möglichkeit an, $\vec{v}_2$ zu berechnen, ohne $\vec{v}_1$ zu verwenden.

$$\vec{v_2} = M^2 * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Interpretieren Sie die Komponenten von $\vec{v}_1$ auf das Problem bezogen.

Die angegebene Matrix M ist wie folgt aufgebaut:

von nach	A	B	C
A			
B			
C			

deshalb ist

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 440 \\ 424 \\ 336 \end{pmatrix}$$

wie folgt zu deuten: nach einem Tag befinden sich am Platz A 440 Bienen, am Platz B 424 und am Platz C 336

c) Bestimmen Sie die stationäre Abibienenverteilung der Matrix M .

Für eine stationäre Verteilung muss gelten:

$M \cdot \vec{s} = \vec{s}$

$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

hier:

$\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

I $\quad$ 0,90x + 0,10y + 0,10z = x

II $\quad$ 0,06x + 0,80y + 0,20z = y

III $\quad$ 0,04x + 0,10y + 0,70z = z

umgeformt:

I $\quad$ - 0,1x + 0,1y + 0,1z = 0

II $\quad$ 0,06x - 0,2y + 0,2z = 0

III $\quad$ 0,04x + 0,1y - 0,3z = 0

Lösung des Gleichungssystems:

II – 2 ·I $\quad$ 0,26x – 0,4y = 0

III + 3·I $\quad$ -0,26x + 0,4y = 0

also: 0,26x = 0,4y und daraus y = 0,65x

eingesetzt in I:

-0,1x + 0,1·0,65x + 0,1z = 0 $\quad$ liefert z = 0,35x

die stationäre Verteilung ist dann

$\begin{pmatrix} x \\ 0{,}65x \\ 0{,}35x \end{pmatrix}$

und mit x + y + z = 1200

x + 0,65x + 0,35x = 1200

2x = 1200

x = 600

y = 0,65·600 = 390

z = 0,35·600 = 210

Lösung mit Casio fx-991 ES

aus dem linearen Gleichungssystem

I $\quad$ - 0,1x + 0,1y + 0,1z = 0

II $\quad$ 0,06x - 0,2y + 0,2z = 0

Wegen der linearen Abhªngigkeit nehmen wir statt der unteren Zeile aus der Matrix:

III $\quad$ x + y + z = 1200

und lºsen mit MODE 5, 2. Es ergibt sich ebenso X=600, Y=390 und Z=210.

Bei ihren Untersuchungen in 2009 zählten die Forscher, bevor sie ihren oben beschriebenen Eingriff starteten, an jedem Morgen stets
600 der Tiere an Platz A, 390 an Platz B und die restlichen 210 an Platz C.

Vergleichen Sie diese Verteilung mit der stationären und interpretieren Sie das Ergebnis des Vergleichs.

die stationäre Verteilung liegt bereits vor

d) Ermitteln Sie die Übergangsmatrizen für einen Zeitraum von 31 und von 62 Tagen auf drei Nachkommastellen genau.

mit dem Casio lª sst sich in MODE 6 mit etwas M¿he bilden (x¦ und x¡ verkn¿pfen):

$$M^{31} = \begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix}$$

$$M^{62} = \begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die zugehörigen Abibienenverteilungen $\vec{v}_{31}$ und $\vec{v}_{62}$ (auf ganzzahlige Werte gerundet).

$$\begin{pmatrix} 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}325 & 0{,}325 & 0{,}325 \\ 0{,}175 & 0{,}175 & 0{,}175 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$$

beide Verteilungen sind gleich, da Matrix und Vektor jeweils gleich

Vergleichen Sie $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{40} & \frac{13}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{7}{40} & \frac{7}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}$ mit den in diesem Aufgabenteil berechneten Matrizen.

1:2 = 0,5 13:40=0,325 7:40=0,175

Matrix G stimmt mit den oben berechneten Potenzen der Matrix M überein, dies lässt die Vermutung zu, G sei Grenzmatrix

Berechnen Sie

sowohl $G * \vec{x}$ für jede beliebige Abibienenverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x + y + z = 1200$.

$$G * \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5x + 0{,}5y + 0{,}5z \\ 0{,}325x + 0{,}325y + 0{,}325z \\ 0{,}175x + 0{,}175y + 0{,}175z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5(x+y+z) \\ 0{,}325(x+y+z) \\ 0{,}175(x+y+z) \end{pmatrix}$$

und mit x+y+z=1200

$$G * \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5(x+y+z) \\ 0{,}325(x+y+z) \\ 0{,}175(x+y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 1200 \\ 0{,}325 \cdot 1200 \\ 0{,}175 \cdot 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 390 \\ 210 \end{pmatrix}$$

als auch $M * G$.

$M * G = G$ vergleiche die oben berechneten Potenzen der Matrix M

Erläutern Sie die Bedeutung der Matrix G für den Übergangsprozess.

G ist Grenzmatrix, die berechnete stationäre Verteilung ist Grenzverteilung

e) Erläutern Sie den Begriff „inverse Matrix" und erklären Sie, wozu die inverse Matrix von M in diesem Sachzusammenhang verwendet werden kann.

eine zu M inverse Matrix M^{-1} muss die Bedingung $M * M^{-1} = M^{-1} * M = E$ erfüllen, bzw.

$M \cdot \vec{a} = \vec{b}$ und $M^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{a}$

für den Sachzusammenhang: aus einer augenblicklich vorliegenden Verteilung kann ich den Vorgängerzustand bestimmen, d.h. ich berechne die Verteilung der Abibienen am Vortag.

Ein paar Tage nach einem heftigen Sturm im April 2009 finden die Abibienenforscher die folgende Verteilung vor:
80 Abibienen am Platz A, 637 am Platz B und die restlichen 483 am Platz C.

Nach einer Berechnung von $M^{-1} * \begin{pmatrix} 80 \\ 637 \\ 483 \end{pmatrix}$ behaupten sie, dass der Sturm das Wanderverhalten der Abibienen verändert hat.

Begründen Sie, wie die Forscher zu ihrer Behauptung gekommen sind.

Berechnung mit Casio fx-991 ES

Matrix M wurde bereits eingegeben, der Vektor muss noch als 3x1 – Matrix gespeichert werden.

Inverse von M kann dann mit dem neuen Verteilungsvektor multipliziert werden und liefert:

$$\begin{pmatrix} -50 \\ 650 \\ 600 \end{pmatrix}$$

eine negative Bienenanzahl ist sachlich nicht möglich, dies kann kein Ausgangszustand sein, somit muss der Sturm das Wanderverhalten verändert haben, denn die alte Matrix M passt nicht zu der neuen Verteilung (A: 80, B: 637, C: 483). Es muss ein neues Wanderverhalten mit einer neuen Übergangsmatrix geben.