Zur Lösung dieser Aufgaben werden insbesondere die *Oder-Regel* und die *Komplementärregel* verwendet.

1 Strick S. 17 Nr. 2

Ein Würfel wird 2-mal geworfen. Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse, dass der eine *oder* andere Würfel zeigt: a) ⚅, b) Augenzahl größer als 4, c) eine gerade Augenzahl ?

1.1 2a

$P(a) = P(\text{⚅}?) + P(?\text{⚅}) - P(\text{⚅⚅}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

1.2 2b

$P(b) = P(\text{⚄}?) + P(?\text{⚄}) + P(\text{⚅}?) + P(?\text{⚅}) - P(\text{⚄⚄}) - P(\text{⚄⚅}) - P(\text{⚅⚄}) - P(\text{⚅⚅}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = \frac{2}{3} - \frac{4}{36} = \frac{5}{9}$

1.3 2c

$P(\overline{c}) = P(\text{⚀⚀}) + P(\text{⚀⚂}) + P(\text{⚀⚄}) + P(\text{⚂⚀}) + P(\text{⚂⚂}) + P(\text{⚂⚄}) + P(\text{⚄⚀}) + P(\text{⚄⚂}) + P(\text{⚄⚄}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
$P(c) = 1 - P(\overline{c}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2 Strick S. 18 Nr. 3

Ein Skatspiel besteht aus 32 (frz.) Karten (Farbe: Kreuz ♣, Pik ♠, Herz ♡, Karo ♢; 8 Werte: Ass, König, Dame, Bube, Zehn, Neun, Acht, Sieben; hierbei gilt als Bild König, Dame oder Bube und als Zahl Sieben bis Zehn.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit wenn eine gezogene Karte a) Dame (D) oder König (K), b) rot oder Karo, c) schwarz oder Zahl (Z), d) Bild oder Kreuz ist ?

2.1 3a

$P(a) = P(D) + P(K) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

2.2 3b

$P(b) = P(rot \cup \diamondsuit) = P(rot) = \frac{1}{2}$, denn $\diamondsuit \subset rot$.

2.3 3c

$P(c) = P(schwarz \cup Z) = P(schwarz) + P(Z) - P(schwarz \cap Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2.4 3d

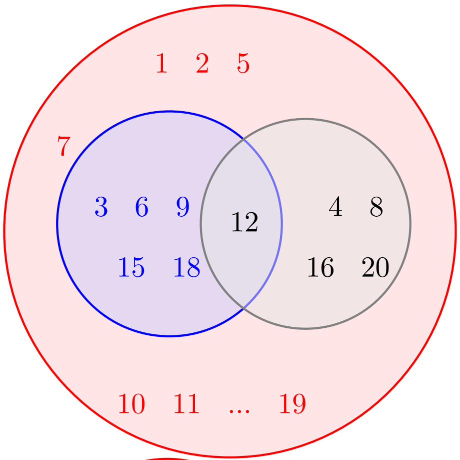
$P(d) = P(Bild \cup \clubsuit) = P(Bild) + P(\clubsuit) - P(Bild \cap \clubsuit) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$.

3 Strick S. 19 Nr. 8

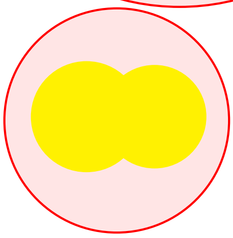
Wir betrachten 20 nummerierte Kugeln. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl weder durch 3 noch durch 4 teilbar ist? Zeige $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cap E_2)$. b) Bestimme analog die Wahrscheinlichkeiten für weder durch 3 noch 5, weder durch 5 noch 6, nicht durch 4 und nicht durch 5, und nicht durch 3 aber durch 4 teilbar.

3.1 8a

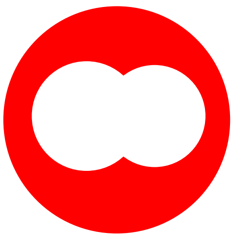
Wir zeigen das gewünschte mittels Venn-Diagramm.



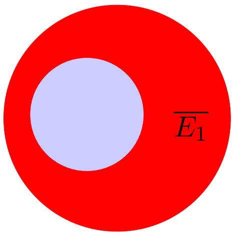
Das Ereignis E_1 („gezogene Zahl ist durch 3 teilbar“) entspricht der Menge $E_1 = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(E_1) = \frac{|E_1|}{|S|} = \frac{6}{20} = 30\%$. Das Ereignis E_4 („gezogene Zahl ist durch 4 teilbar“) entspricht der Menge $E_2 = \{4; 8; 12; 16; 20\}$. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(E_1) = \frac{|E_2|}{|S|} = \frac{5}{20} = 25\%$.
Nebenstehend wird dies symbolisch als Venn-Diagramm dargestellt. Der rote Kreis symbolisiert S, der blaue Kreis symbolisiert E_1, mit den Elementen, die durch 3 teilbar sind. Der graue Kreis symbolisiert E_2, mit den Elementen, die durch 4 teilbar sind. E_1,E_2 sind Teilmengen von S, man schreibt E_1,$E_2 \subset S$. Die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ enthält alle Elemente, die durch 3 und durch 4 teilbar sind, $E_1 \cap E_2 = \{12\}$.

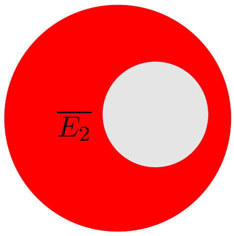


Anhand des Venn-Diagramms kann man leicht die genannten Mengen der Reihe nach erkennen: Die Menge mit den Zahlen, die durch 3 oder 4 teilbar sind, ist die Vereinigungsmenge $E_1 \cup E_2$, rechts dargestellt in gelb.

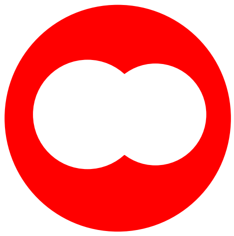


Entsprechend ist die Menge der Zahlen, die weder durch 3 noch durch 4 teilbar sind, das Komplement zum Gelben, auf dem 2. Bild einfach in rot hervor gehoben. Mathematisch schreibt man hierfür $\overline{E_1 \cup E_2}$, Da wir $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cap E_2)$ zeigen sollen, betrachten wir nun (jeweils in rot) der Reihe nach $\overline{E_1}$ und dann rechts daneben $\overline{E_2}$:





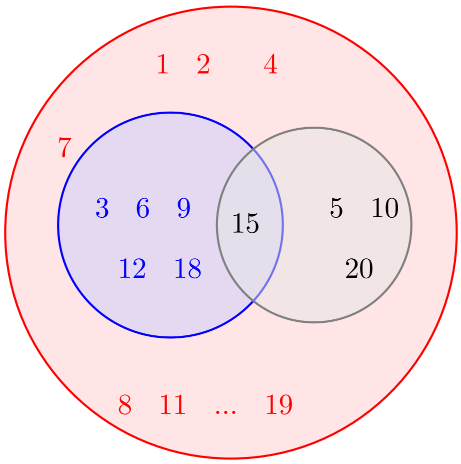
Wenn wir obige beide Komplementärmengen $\overline{E_1}$ und $\overline{E_2}$ überlappen, so ist anschaulich klar, dass $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = \overline{E_1 \cup E_2}$ gilt. Also Nicht-E_1 geschnitten mit Nicht-E_2 ist gleich der Nicht-Vereinigung von E_1 *oder* E_2. Oder anders gesagt: Weder durch 3 noch durch 4 teilbar bedeutet das Gleiche wie „nicht durch 3 *und* auch nicht durch 4 teilbar“.



Nun ist der Beweis einfach, denn nach der Oder-Regel gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ und nach der Komplementärregel $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Zu zeigen ist $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cap E_2)$. Durch die obigen VENN-Diagramme ist inzwischen klar, dass $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = \overline{E_1 \cup E_2}$, also ist $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1 \cup E_2})$. Nach der Komplementärregel ist $P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2)$. Schließlich setzen wir für $P(E_1 \cup E_2)$ nach der Oder-Regel ein: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ und fertig: $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cap E_2) = 1 - \frac{6}{20} - \frac{5}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$.

3.2 8.b

Wir kennen bereits das Ereignis E_1 („gezogene Zahl ist durch 3 teilbar“) mit der Wahrscheinlichkeit $P(E_1) = 30\%$. Das Ereignis E_5 („gezogene Zahl ist durch 5 teilbar“) entspricht der Menge $E_2 = \{5; 10; 15; 20\}$. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(E_5) = \frac{|E_5|}{|S|} = \frac{4}{20} = 20\%$. Nebenstehend wird dies symbolisch als VENN-Diagramm dargestellt. Der rote Kreis symbolisiert S, der blaue Kreis symbolisiert E_1, mit den Elementen, die durch 3 teilbar sind. Der graue Kreis symbolisiert E_5, mit den Elementen, die durch 5 teilbar sind. Die Schnittmenge $E_1 \cap E_5$ enthält alle Elemente, die durch 3 oder durch 5 teilbar sind, $E_1 \cap E_5 = \{15\}$. Weder durch 3 noch 5 teilbar hat analog die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_5}) = 1 - P(E_1) - P(E_5) + P(E_1 \cap E_5) = 1 - \frac{6}{20} - \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20} = 55\%$.



Mit $E_6 = \{6; 12; 18\}$ und $P(E_6) = \frac{3}{20}$ folgt die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{E_6} \cap \overline{E_5}) = 1 - P(E_6) - P(E_5) + P(E_6 \cap E_5) = 1 - \frac{3}{20} - \frac{4}{20} + \frac{0}{20} = \frac{13}{20} = 65\%$.

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{E_2} \cap \overline{E_5}) = 1 - P(E_2) - P(E_5) + P(E_2 \cap E_5) = 1 - \frac{5}{20} - \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{12}{20} = 60\%$.

Schließlich interessiert noch $\overline{E_3} \cap E_2 = \{4; 8; 16; 20\}$, also $P(\overline{E_3} \cap E_2) = \frac{4}{20} = 20\%$.