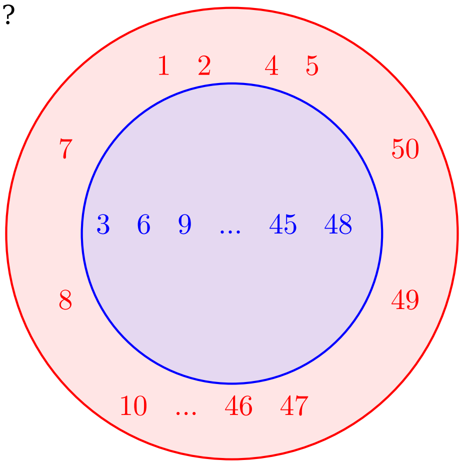
1 Wiederholung Mengenlehre und Venn-Diagramm

Statistikaufgaben aus dem Buch „Strick“ lassen sich mit Begriffen der Mengenlehre und mithilfe von Venn-Diagrammen leichter verstehen. Z.B. S. 17, Nr. 1: In einem Gefäß (Menge S) befinden sich 50 gleichartige Kugeln (Elemente 1 bis 50), die von 1 bis 50 nummeriert sind. Eine dieser 50 Kugeln wird zufällig gezogen (Laplace-Annahme). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für A, wenn A: „gezogene Zahl ist durch 3 teilbar“?

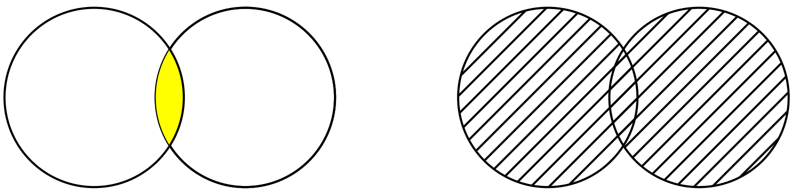
Das Ereignis A („gezogene Zahl ist durch 3 teilbar“) entspricht der Menge $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48\}$. Die Wahrscheinlichkeit für A heißt $P(A)$ und ist gleich dem Verhältnis der Anzahl der für A günstigen Elemente relativ zu der Anzahl der Elemente S: $P(A) = \frac{16}{50} = 32\%$. Nebenstehend wird dies symbolisch als Venn-Diagramm dargestellt (der rote Kreis symbolisiert S, der blaue Kreis symbolisiert A, eine Teilmenge von S, die in S eingebettet ist: $A \subset S$):



1.1 Theorie: Definition der Menge

Mengen bestehen aus unterscheidbaren Elementen. Wenn x ein Element der Menge M ist, schreibt man: $x \in M$.

Der Durchschnitt zweier Mengen M und N ist $M \cap N := \{x \mid x \in M \land x \in N\}$, d.h. die Schnittmenge $M \cap N$ enthält die Elemente, die sowohl in M als auch in N sind (Merke: „∩ls ∩uch“). Im Bild ist die Schnittmenge $M \cap N$ gelb hervorgehoben, die Vereinigung der beiden Mengen ist schraffiert.



Die Vereinigung von M und N ist $M \cup N := \{x \mid x \in M \lor x \in N\}$, d.h. die Vereinigungsmenge $M \cup N$ enthält alle Elemente, die in M oder in N enthalten sind (Merke: „∪ereinigt im großen Topf $\sqcup$“, siehe den gesamten schraffierten Bereich im obigen Bild).

Es kommt bei Durchschnitt und Vereinigung nicht auf die Reihenfolge an, genauso bei den Elementen der Mengen selbst: $M \cap N = N \cap M$, $M \cup N = N \cup M$ und z.B. $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\} = \{2; 1; 3; 4; 5; 6; 7; ...\} = \{4; 2; 1; 3; 5; 6; 7; ...\} = ...$

1.2 Leere Menge und Wahrscheinlichkeit

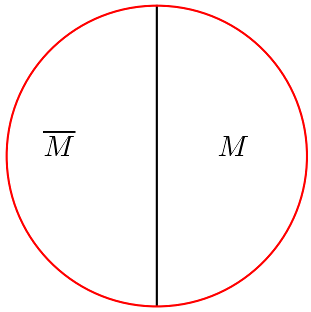
Die leere Menge enthält gar kein Element $\varnothing = \{\}$, Mathematiker schreiben auch $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$, dieser leeren Menge entspricht das unmögliche Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $P(\varnothing) = P(\{\}) = 0$. Für jede beliebige Menge M gilt: $M \cup \varnothing = M$, $\varnothing \subset M$ und $M \cap \varnothing = \varnothing$. Entsprechend gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(M \cup \varnothing) = P(M)$ und $P(M \cap \varnothing) = 0$.

1.3 Mächtigkeit einer Menge und Wahrscheinlichkeit

Es gibt den Begriff der Mächtigkeit von Mengen. Die Ergebnismenge eines Würfelwurfs ist z.B. $S = \{$⚀;⚁;⚂;⚃;⚄;⚅$\}$. Diese Menge hat 6 Elemente, die man abzählen kann (Reihenfolge egal). Der Mathematiker sagt auch: Die Mächtigkeit von M ist sechs, und schreibt $|M| = 6$. Bei einem LAPLACE-Versuch ist die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis (z.B. dafür, dass die „1“ geworfen wird) $p = \frac{1}{|M|} = \frac{1}{6}$. Im Beispiel oben (1) war $|A| = 16$ und $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{16}{50} = 32\%$.

1.4 Komplementäre Menge und Wahrscheinlichkeit

Ist eine Menge M eine Teilmenge einer anderen Menge S, so schreibt man $M \subset S$. Elemente aus S, die nicht in M enthalten sind, fassen wir in die Menge $\overline{M}$ zusammen. Die Menge $\overline{M}$ heißt kurz Nicht-M, Mathematiker nennen sie auch das Komplement zu M. Es gilt $M \cap \overline{M} = \varnothing = \{\}$ und $M \cup \overline{M} = S$. Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(M \cap \overline{M}) = 0$ und $P(M) + P(\overline{M}) = 1$ also insbesondere auch $P(M) = 1 - P(\overline{M})$. Nebenstehend als VENN-Diagramm (der rote Kreis symbolisiert S, die linke Hälfte $\overline{M}$ und die rechte Hälfte M):

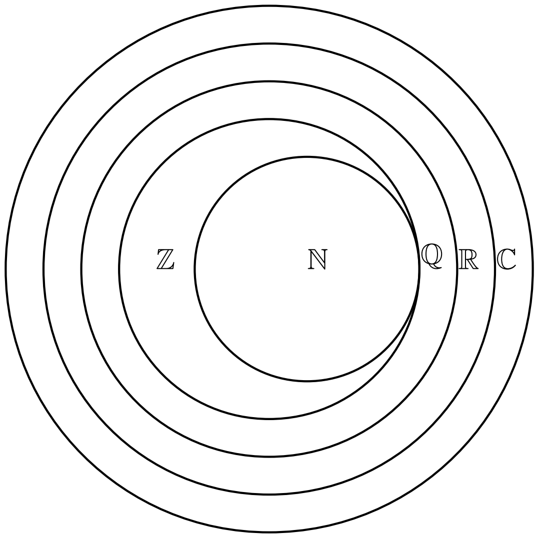


2 Zahlenmengen

Im Mathematikunterricht kommen häufig die folgenden Zahlenmengen vor: $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen. $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen. $\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen. $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen. $\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$ ist eine Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}$, usw. Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Als VENN-Diagramm:



Beispielhafte Elemente:

$2 \in \mathbb{N}$,

$-2 \in \mathbb{Z}$,

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$,

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$,

$\sqrt{-2} \in \mathbb{C}$.

Leider wird Mengenlehre in der Grundschule und oft auch in höheren Schulen nicht mehr vermittelt. Es gibt aber für das Selbststudium zahlreiche gute Bücher und Artikel, z.B.

`http://de.wikiversity.org/wiki/Projekt:Mathematik_ist_überall/Mengen/Lektionen/Mengenlehre`