1 Definition

Die rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ Elementen a_{ij} in m Zeilen und n Spalten heißt $m \times n$-Matrix. Gewöhnlich handelt es sich bei den Elementen a_{ij} der Matrix um reelle Zahlen. Man nennt das Paar (m,n) auch den Typ der $m \times n$-Matrix A. Für den Typ bzw. die Benennung merke man sich „Zunächst Zeilen, später Spalten nennen“.

2 Besondere Typen

2.1 Vektoren und transponieren

Die Matrizen vom Typ $1 \times n$ heißen auch Zeilenvektoren, die Matrizen vom Typ $m \times 1$ heißen auch Spaltenvektoren, letztere werden auch gemeinhin kurz Vektoren genannt. Die Transponierte von Matrix A schreibt man A^T. Man kann sagen, dass A^T aus A durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen entsteht. Also ist die Transponierte eines Zeilenvektors ein Spaltenvektor und umgekehrt. Weiterhin gilt offensichtlich $(A^T)^T = A$ für jede Matrix A. Z.B. Zeilenvektor $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Transponierte $A^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, einen Spaltenvektor, den man in Vektorschreibweise auch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ schreibt.

2.2 Quadratische Matrix

Bei einer quadratischen Matrix ist die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten: $m = n$. Z.B. ist folgende 2×2-Matrix A quadratisch:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix A mit $A^T = A$ nennt man symmetrisch.

2.3 Diagonalmatrix

Eine (quadratische) Diagonalmatrix D hat nur Elemente auf der Hauptdiagonalen die ungleich Null sind, z.B.:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.4 Einheitsmatrix

Eine besondere Diagonalmatrix ist die Einheitsmatrix E. Sie hat als Elemente auf der Hauptdiagonalen ausschließlich Einsen, alle anderen Elemente sind Null, z.B.:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Nullmatrix

Bei der Nullmatrix O sind alle Elemente gleich Null, z.B.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Obere Dreiecksmatrix

Außerdem ist beim Gauß-Verfahren noch die Obere Dreiecksmatrix von besonderer Bedeutung. In diese Form wird jede Matrix mittels Äquivalenzumformungen überführt, so dass man ein LGS lösen kann, siehe `http://warncke-family.de/g12/LGS_LS_S009.pdf`.

3 Addition und Subtraktion von Matrizen

Die Addition von (zwei) Matrizen gleichen Typs (also Matrizen gleicher Zeilen- und gleicher Spaltenzahl) erfolgt durch die Addition entsprechender Elemente. Da Addition und Subtraktion elementweise geschieht, sind Addition und Subtraktion von Matrizen auch nur für Matrizen von dem gleichen Typ definiert. Sind die Matrizen A,B vom Typ $m \times n$, dann versteht man unter ihrer Summe eine Matrix C mit den Elementen: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Hieran sieht man auch, dass man die Reihenfolge bei der Addition vertauschen kann: $A + B = B + A$.
Die Summe C ist (wieder) eine Matrix vom Typ $m \times n$.
Ein simples Beispiel ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4 Skalarmultiplikation

Eine Matrix wird mit einer reellen Zahl s, einem sogenannten Skalar, multipliziert, indem alle Elemente der Matrix mit dem Skalar multipliziert werden, z.B.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Auch bei der Skalarmultiplikation darf man die Reihenfolge vertauschen $s \cdot A = A \cdot s$. Skalar ist ein anderes Wort für Zahl, also ein Element aus der Menge z.B. der reellen Zahlen. Manche Autoren bezeichnen einen Skalar auch als 1×1-Matrix; das ist problematisch, denn wie wir sehen, kann eine Matrix nur sinnvollerweise mit einer anderen Matrix multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl des ersten Faktors mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors übereinstimmt (siehe 5). Dagegen kann eine Zahl sowohl von links als auch von rechts an eine Matrix multipliziert werden wobei jedes Element der Matrix mit der Zahl multipliziert wird (s.o.). Ein Skalar hat keine Dimension, eine Matrix dagegen schon. Mathematiker sehen Matrizen meist als eine (lineare) Abbildung, nicht als eine Zahl. [1]

[1] Möchte man bei echten Matrizen bleiben, so lässt sich die Skalarmultiplikation auch durch Wandlung der Zahl s (Skalar) in eine echte Matrix A auf zweierlei Wegen verfolgen:

1. Wenn man den Skalar s in eine Diagonalmatrix in jedes Element der Hauptdiagonalen schreibt, $a_{ii} = s$, 0 sonst, kann man die Skalarmultiplikation auch als gewöhnliche Matrizenmultiplikation schreiben $C = A \cdot B$ bzw. $C = B \cdot A$ (A,B müssen passenden Typs sein, sicherheitshalber quadratisch).
2. Die skalare Multiplikation entspricht alternativ auch dem sogenannten Hadamard-Produkt der beiden quadratischen Matrizen A,B: $A.B$ bzw. $B.A$ mit der Matrix $A = (a_{ij})$, die $a_{ij} = s$ für sämtliche Koeffizienten erfüllt. Das Hadamard-Produkt ist dann $C = A.B = (s \cdot b_{ij})$.

5 Matrixmultiplikation

Das Produkt der $m \times n$-Matrix A und der $p \times q$-Matrix B kann nur für $n = p$ gebildet werden. Die Produktmatrix C ist dann vom Typ $m \times q$. Zwei Matrizen werden miteinander multipliziert, indem nach folgenden Schema[2] „Zeile auf Spalte“ gelegt wird: Gegeben sind die Matrizen A,B:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ und } B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es soll das Produkt $C = AB$ ermittelt werden. C ist eine 3×2-Matrix.

		Spalte 1	
		-1	1
Zeile 1		1	-2
1	4	3	
2	5		
3	-6		

Die erste Zeile von A wird elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert: $1\cdot(-1)+4\cdot 1 = 3$ und ergibt das Element $c_{11} = 3$.

		Spalte 2	
		-1	1
Zeile 1		1	-2
1	4	3	-7
2	5		
3	-6		

Nun wird die erste Zeile von A elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert: $1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -7$ und ergibt das Element $c_{12} = -7$.

		Spalte 1	
		-1	1
Zeile 2		1	-2
1	4	3	-7
2	5	3	
3	-6		

Nun wird die zweite Zeile von A elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{21} = 3$.

		Spalte 2	
		-1	1
Zeile 2		1	-2
1	4	3	-7
2	5	3	-8
3	-6		

Nun wird die zweite Zeile von A elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{22} = -8$.

		Spalte 1	
		-1	1
Zeile 3		1	-2
1	4	3	-7
2	5	3	-8
3	-6	-9	

Nun wird die dritte Zeile von A elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{31} = -9$.

[2] Falksches Schema, benannt nach Sigurd Falk, em. Prof. der TU Braunschweig.

			Spalte 2
		-1	1
Zeile 3		1	-2
1	4	3	-7
2	5	3	-8
3	-6	-9	15

Schließlich wird die dritte Zeile von A elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert und ergibt das Element $c_{32} = 15$.

Das Produkt $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -8 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$ existiert. Dagegen ist nicht das Produkt BA möglich.

Wenn beide Matrizen vom gleichen quadratischen Typ sind, dann kann man sowohl das Produkt AB als auch das Produkt BA bilden, aber man sollte beachten, dass beide Produkte i.A. nicht gleich sind, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Besonders augenscheinlich wird dies, wenn wir folgendes Beispiel (mit sog. Vektoren, siehe 2.1) betrachten:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$. Dagegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Ersteres Produkt ist eine 1×1-Matrix und wird gern als ein Skalar missverstanden oder als sog. Skalarprodukt der Vektoren definiert. Letzteres Produkt ist dagegen eine symmetrische 3×3-Matrix.

6 Determinante

Die Determinante einer Matrix A ist, falls sie existiert, eine Zahl. Determinanten können nur von quadratischen Matrizen berechnet werden. Ist die Determinante ungleich null, so ist das zugehörige Lineare Gleichungssystem (LGS, vgl. `http://warncke-family.de/g12/LGS_LS_S009.pdf`) eindeutig lösbar. Entsprechend ist eine quadratische Matrix A genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich null ist. Falls die Determinante gleich null ist, so gibt es weder eine Inverse A^{-1} noch zu dem zugehörigen LGS eine Lösung. In diesem Sinne spielt die Determinante im Schulunterricht eine ähnliche Rolle für LGS wie die Diskriminante für quadratische Gleichungen (vgl. `http://www.warncke-family.de/g11a/quad_null.pdf`), sie bestimmt (engl. determine) ob eine eindeutige Lösung existiert.

Für 2×2-Matrizen gibt es eine einfache Formel zur Berechnung der Determinante, sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist die Determinante das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen minus dem Produkt der Elemente der Nebendiagonalen. Die Hauptdiagonale verläuft von oben links nach unten rechts, die Nebendiagonale von oben rechts nach unten links:

$$|A| = ad - bc$$

Vier Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 1, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|C| = -16, \qquad C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|D| = -2, \qquad D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Für eine 3×3-Matrix A gilt die Formel

$$\begin{aligned} |A| &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Man erhält diese Formel, wenn man nach der Regel von Sarrus die Matrix A um die ersten beiden Spalten erweitert, und dann ähnlich zur Formel für 2×2-Matrizen (s.o.) von den Produkten der Elemente der Hauptdiagonalen die Produkte der Elemente der Nebendiagonalen abzieht:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + \end{array}$$

Auch hier ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A| = -2 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3{,}5 & 2 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

7 Inverse

Die Inverse zu einer Matrix A kehrt die Matrixoperation von A wieder vollkommen um. Es gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, d.h. die Verkettung von Matrixoperation und ihrer Inversen ist die Multiplikation mit einer Einheitsmatrix E, d.h. A und A^{-1} heben sich zur Einheitsmatrix auf. Da hierbei die Reihenfolge der Faktoren egal ist, muss A quadratisch sein. Ist man sich nicht sicher, ob man die gesuchte Inverse gefunden hat, so gilt die Matrixmultiplikation von $A^{-1} \cdot A$ bzw. $A \cdot A^{-1}$ als Probe: ist alles okay, so kommt E heraus. Erst wenn die Determinante einer Matrix A ungleich null ist: $|A| \neq 0$, dann kann man zu dieser Matrix auch eine Inverse A^{-1} finden. Bislang haben wir implizit Inverse berechnet, wenn wir LGS gelöst haben. Der Zusammenhang ist formal recht einfach:

Gesucht ist die Lösung $\vec{x}$ des LGS: $A\vec{x} = \vec{b}$. Wenn wir die Inverse zu A kennen und diese von links multiplizieren, dann erhält man:

$$A^{-1}| \qquad A\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad E\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Die Lösung $\vec{x}$ eines LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist also recht simpel formal $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, theoretische Physiker sprechen somit z.B. gern vom Invertieren und meinen damit das Lösen von großen LGS[3].
Es gibt nicht nur einen formalen, sondern auch einen formelhaften Zusammenhang zwischen Inverser und Determinante, so dass nicht unbedingt mittel Gauß-Verfahren die Inverse berechnet werden muss.
Formel für 2×2-Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Formel für 3×3-Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Allgemein sind also folgende Aussagen für quadratische Matrizen A gleichwertig:

- Die Determinante der Matrix A ist ungleich Null: $\det A \equiv |A| \neq 0$.
- Die Matrix A ist invertierbar: A^{-1} existiert und es gilt $|A^{-1}| = \frac{1}{\det A}$.
- Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar und hat eine eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Besitzer des für die Prüfung zugelassenen Taschenrechners Casio fx-991 ES können Determinanten, Inverse etc. schnell berechnen lassen,
siehe `http://www.warncke-family.de/g12/Anleitung%20Casio%20fx-991ES.pdf`.

Ebenso Besitzer des für die Prüfung zugelassenen grafikfähigen Casio-Rechners (fx-9750GII), siehe `http://www.warncke-family.de/g12/Kurzanleitung_FX-9750GII.pdf`, der auch größere Gleichungssysteme lösen kann.

[3] Ein weiteres formales Lösungsverfahren ist die sogenannte Cramersche Regel, die praktisch ohne Bedeutung ist und deswegen hier nicht vertieft wird.