Inhaltsverzeichnis

1 Klebstoff

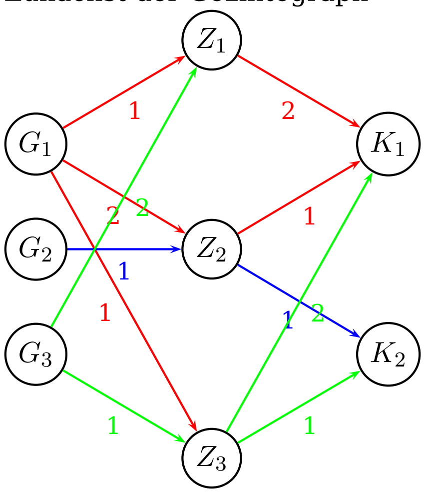
Ein Klebstoffhersteller mischt in der ersten Stufe aus drei Grundstoffen G_1, G_2, G_3 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und stellt daraus in der zweiten Stufe zwei Klebersorten K_1 und K_2 her. Gegeben sind die zugehörigen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1 Berechnungsweg und Kosten

- Erstellen Sie für den zweistufigen Produktionsprozess das zugehörige Verflechtungsdiagramm (Gozintograph).
- Zeigen Sie für ausgewählte Elemente mithilfe von Matrizenrechnung wie sich C aus A und B ergibt, und dass somit C die erforderlichen Mengen der Grundstoffe pro Mengeneinheit (ME) Kleber beschreibt.
- Es werden 20 ME K_1 und 30 ME K_2 bestellt. Bestimmen Sie jeweils die Mengen der Grundstoffe für diese Bestellung.
- Die Kosten der Grundstoffe pro ME betragen für G_1 45 ct, für G_2 25 ct und für G_3 40 ct. Berechnen Sie mithilfe Matrix-Vektor-Operation die Kosten für jeweils eine ME K_1 und K_2.

Lösung:
Zunächst der Gozintograph



Nun $C = A \cdot B$:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

was offensichtlich ist am Beispiel von $c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$.
Schreiben wir den Bestellvektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$, so ergibt sich der Bedarfsvektor $\vec{g}$:

$$\vec{g} = C \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Also sind für die Bestellung $\vec{k}$ 210 ME G_1, 50 ME G_2 und 150 ME G_3 notwendig.
Schreiben wir die Grundstoffkosten in einen Zeilenvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 40 \end{pmatrix}$ so betragen die gesuchten Kosten

$$\vec{m} \cdot C = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 535 & 200 \end{pmatrix}$$

Die Kosten für eine ME K_1 sind also 5,35 EUR und 2 EUR für eine ME K_2.

1.2 Restbestand

Ein Restbestand von 38 ME G_1, 8 ME G_2 und 34 ME G_3 soll verbraucht werden.

- Bestimmen Sie die ME von Z_1, Z_2 und Z_3 die damit produziert werden.

Lösung:
Wegen $A \cdot \vec{z} = \vec{g}$ folgt

$$\vec{z} = A^{-1} \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Es können 12 ME von Z_1, 8 ME von Z_2 und 10 ME von Z_3 produziert werden.

1.3 Matrix-Vektor-Gleichung

Gegeben ist

$$C \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie mithilfe einer Rechnung die Unbekannten k_1, k_2 und g_3.
- Interpretieren Sie die Werte von k_1, k_2 und g_3 im Sachzusammenhang.

Lösung:
Interpretieren wir dies als LGS, so enthält dieses ein LGS mit 2 Gleichungen und den beiden Unbekannten k_1 und k_2, was sich leicht z.B. mit dem GTR lösen lässt. Die Lösungen k_1 und k_2 kann man dann in die 3. Gleichung einsetzen und nach g_3 umformen.
Alternativ kann man ein Gleichungssystem aufstellen mit 3 Unbekannten auf der linken Seite:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 0 & 60 \\ 1 & 1 & 0 & 15 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

das sich schnell mit dem Gleichungslöser des GTR eindeutig lösen lässt: $k_1 = 5$, $k_2 = 10$ und $g_3 = 40$. Die Interpretation ist, dass wenn 60 ME G_1 und 15 ME G_2 vorhanden sind, dann mit 40 ME G_3 5 ME K_1 und 10 ME K_2 produziert werden können.

1.4 Inverse

Setzt man in folgender Matrix A^{-1} passende Werte für a und b ein, so ist A^{-1} die Inverse zu der Matrix A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie ohne Einsatz eines Rechners für jeweils a und b eine passende Zahl.
- Zeigen Sie allgemein mithilfe von Umformungen, dass aus $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ die Gleichung $\vec{x} = M^{-1}\vec{y}$ folgt, wenn M eine quadratische Matrix und M^{-1} die inverse Matrix zu M ist.

Lösung:
Matrix und Inverse bilden als Produkt die Einheitsmatrix E. Hier ergibt sich mit $A^{-1} \cdot A = E$ für a: $(-1) \cdot 2 + a \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 2$ und für b: $2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + b \cdot 1 = 1 \Rightarrow b = -1$.

$$M \cdot \vec{x} = \vec{y} \iff M^{-1} \cdot (M \cdot \vec{x}) = M^{-1} \cdot \vec{y} \iff (M^{-1} \cdot M) \cdot \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y} \iff E \cdot \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y} \iff \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y}$$