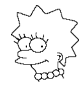
1 Definition



Klären wir zunächst ganz abstrakt, was ein Lineares Gleichungssystem (LGS) ist.
Eine Gleichung heißt „linear", wenn ihre Unbekannten lediglich in der ersten Potenz auftreten.
Zum Beispiel die Gleichung

$$2x_1 + 39x_2 - 13x_3 = 15$$

ist linear, und die Gleichung

$$2(x_1)^2 - (x_2)^5 + 3(x_3) = 15$$

ist nicht linear. Hier sind x_1, x_2, x_3 die Unbekannten (im geometrischen Zusammenhang können wir an x, y und z denken). Die Werte vor den Unbekannten heißen Koeffizienten.
Eine Ansammlung von linearen Gleichungen, die „gleichzeitig" gelöst werden sollen, heißt Lineares Gleichungssystem.
Mit allgemeinen Koeffizienten sieht ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten so aus:

$$\begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ... & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

x_i sind die Unbekannten (Variablen) und a_{ij} sind die Koeffizienten, wobei diese natürlich auch den Wert Null annehmen dürfen.

Unter einer Lösung eines Linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten versteht man ein n-Tupel $(x_1, x_2,..., x_n)$, so dass alle Gleichungen des Systems bei Einsetzen dieses n-Tupels erfüllt sind. Das n-Tupel kann auch als ein n-dimensionaler Schnittpunkt $(x_1|x_2|...|x_n)$ im geometrischen Sinne begriffen werden.
Es existieren entweder eine, unendlich viele oder keine Lösung. Um eine Lösung zu erzielen, werden in bestimmter Folge folgende Umformungen durchgeführt:

1. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich 0,
2. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
3. Vertauschung von zwei Gleichungen.

Da diese Umformungen die Lösungsmenge nicht verändern nennt man sie Äquivalenzumformungen.

2 Konkrete Lösung von LGS

Auf S.9 im Buch von Lambacher und Schweizer wird das Gauss-Verfahren zur Lösung eines Linearen Gleichungssystems (LGS) mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten verwendet. Betont wird hier die Matrixschreibweise. Das Gauss-Verfahren wird die untere linke Dreieckshälfte der Matrix eliminieren, so dass eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

2.1 1. Schritt

Das LGS wird notiert, indem jede Gleichung eine römische Nummer erhält.

$$\begin{array}{llcrcrcr} I & 3x_1 & + & 6x_2 & + & (-2)x_3 & = & -4 \\ II & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & = & 0 \\ III & \frac{3}{2}x_1 & + & 5x_2 & + & (-5)x_3 & = & -9 \end{array}$$

Das LGS wurde hierbei so geschrieben, dass negative Zahlenwerte der Koeffizienten in Klammern stehen und somit für die Matrixschreibweise leicht übernommen werden können. Die erweiterte Koeffizientenmatrix sieht so aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$$

2.2 2. Schritt

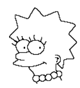
Man ersetzt die 2. Gleichung durch eine Gleichung, in der die ursprüngliche Gleichung zu einem Vielfachen einer anderen Gleichung addiert wurde, so dass x_1 weg fällt. Hier nimmt man am besten als Gleichung IIa die Differenz von II mit I:

$$\begin{array}{llcrcrcr} I & 3x_1 & + & 6x_2 & + & (-2)x_3 & = & -4 \\ IIa = II - I & 0 & + & (-4)x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ III & \frac{3}{2}x_1 & + & 5x_2 & + & (-5)x_3 & = & -9 \end{array}$$

In Matrixschreibweise sieht dies so aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$$

2.3 3. Schritt



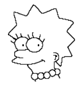
Man ersetzt die 3. Gleichung durch eine Gleichung, in der die ursprüngliche Gleichung zu einem Vielfachen einer anderen Gleichung addiert wurde, so dass x_1 weg fällt. Hier nimmt man am besten als Gleichung $IIIa$ die Differenz von III mit einer halben I:

$$\begin{array}{llcrcrcr} I & 3x_1 & + & 6x_2 & + & (-2)x_3 & = & -4 \\ IIa = II - I & 0 & + & (-4)x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ IIIa = III - \frac{1}{2}I & 0 & + & 2x_2 & + & (-4)x_3 & = & -7 \end{array}$$

In Matrixschreibweise sieht dies so aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & 5 & -5 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

2.4 4. Schritt



Man ersetzt die 3. Gleichung durch eine Gleichung, in der die ursprüngliche Gleichung zu einem Vielfachen einer anderen Gleichung addiert wurde, so dass nun auch noch x_2 weg fällt. Hier nimmt man am besten als Gleichung $IIIb$ die Summe von $IIIa$ mit einer halben IIa:

$$\begin{array}{lccccccc}
I & 3x_1 & + & 6x_2 & + & (-2)x_3 & = & -4 \\
IIa = II - I & 0 & + & (-4)x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\
IIIb = IIIa + \frac{1}{2}IIa & 0 & + & 0 & + & (-2\frac{1}{2})x_3 & = & -5
\end{array}$$

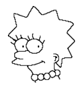
In Matrixschreibweise sieht dies so aus:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & | & -4 \\ 0 & -4 & 3 & | & 4 \\ 0 & 2 & -4 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} \\ + \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & | & -4 \\ 0 & -4 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & -2\frac{1}{2} & | & -5 \end{pmatrix}$$

2.5 5. Schritt

Man bestimmt aus dieser Dreiecksform die Lösung. Aus Gleichung $IIIb$ ersieht man, dass $x_3 = 2$ sein muss. Am schnellsten setzt man $x_3 = 2$ in Gleichung IIa ein und erhält $x_2 = \frac{1}{2}$. Schließlich setzt man x_3 und x_2 in Gleichung I ein und erhält $x_1 = -1$. Die Lösung kann auch als Schnittpunkt oder Lösungsmenge formuliert werden: $\mathbb{L} = \{(-1 \mid \frac{1}{2} \mid 2)\}$.

3 Nr. 5a



In Matrixschreibweise ganz schnell:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & | & 3 \\ 3 & 3 & 7 & | & 13 \\ 4 & -2 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} -\frac{3}{2} & -2 \\ + & \\ & + \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & | & 3 \\ 0 & 9 & -\frac{1}{2} & | & 8\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -13 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{2}{3} \\ + \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & | & 3 \\ 0 & 9 & -\frac{1}{2} & | & 8\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -12\frac{2}{3} & | & -12\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3.1 5a mal sehr fortgeschritten

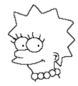
Wer nun vollkommen mit Matrizen vertraut ist, kann diese auch gleich als Operator sehen und das LGS in der Form

$$A\vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufstellen. Die Lösung ergibt sich aus der Inversen A^{-1}, da $A^{-1}A = E$, d.h. $A^{-1}A\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, mit $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 22 & 43 \\ -37 & 26 & -1 \\ 18 & 12 & -16 \end{pmatrix}$. Hierbei ist $|A| = 228 \neq 0$ die von Null verschiedene Determinante von A, so dass eine eindeutige Lösung existiert. Das Lösen des LGS wird somit auch als „invertieren“ bezeichnet. Die Inverse A^{-1} auf den Vektor $\vec{b}$ liefert den gesuchten Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 Nr. 5b



In Matrixschreibweise ganz schnell:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 & | & 5 \\ 4 & -1 & 1 & | & 1 \\ 5 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} 4 & 5 \\ + & \\ & + \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 & | & 5 \\ 0 & 27 & -3 & | & 21 \\ 0 & 32 & -4 & | & 24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{32}{27} \\ + \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 & | & 5 \\ 0 & 27 & -3 & | & 21 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{9} & | & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Möglich ist jetzt auch, im Matrix-Schema zu bleiben, und gar nicht mehr auf die Ebene der Gleichungen zu gehen. So lässt sich jetzt die 3. Zeile der Matrix mit dem Faktor $-\frac{9}{4}$ multiplizieren und dann 3-mal zur 2. Zeile hinzu addieren. Anschließendes Multiplizieren der 2. Zeile mit dem Faktor $\frac{1}{27}$ führt dazu, dass in der 2. und 3. Zeile der Matrix nur noch die Diagonalelemente mit dem Wert 1 stehen. Analog wird schließlich mit der ersten Zeile der Matrix verfahren und wir kommen zu folgender erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Lösung steht in der letzten Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix.
Die Matrix, die ausschließlich Einsen als Diagonalelemente enthält, heißt Einheitsmatrix E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$