1 Wendepunkt und GRF3

In der Schule werden meist nur ganzrationale Funktionen dritten Grades (GRF3) analytisch untersucht, die das Spektrum von Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt (W) und Wendetangente liefert. Bemerkenswert sind zwei mathematische Sätze, die das Zusammenspiel GRF3 und W widerspiegeln.

1.1 Jede GRF3 hat genau einen W

Dieser Satz ist besonders einfach zu zeigen, denn notwendig und hinreichend für W sind:

1. Ist x_w Wendestelle, so gilt dort $f''(x_w) = 0$ (NBfW).
2. hinreichend für W: Ist $f''(x_w) = 0$ und gilt außerdem $f'''(x_w) \neq 0$, so ist $W\big(x_w \big| f(x_w)\big)$ ein Wendepunkt der Funktion f.

Beweis:
Für eine GRF3 gilt der Ansatz

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

mit den Koeffizienten $b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. a, b, c, d sind irgendwelche Zahlen, aber a darf dabei nicht null sein, weil f dann höchstens eine quadratische Funktion wäre.
Dann gilt für die Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'''(x) = 6a \neq 0$$

Nach Voraussetzung ist $a \neq 0$ und aus der notwendigen Bedingung für den Wendepunkt (NBfW) folgt dann die Lösung $x_w = -\frac{b}{3a}$ für die Wendestelle. Einsetzen dieser Lösung in den Ansatz ergibt die Koordinaten des Wendepunkts $W\big(x_w \big| f(x_w)\big)$:

$$W\left(-\frac{b}{3a} \middle| \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right).$$

x_w erfüllt die notwendige (NBfW) und die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt und ist die einzige Lösung der Gleichung $f''(x) = 0$.

1.2 Jede GRF3 ist punktsymmetrisch zu W

Bekannt ist, dass eine GRF mit einer Funktionsgleichung mit nur ungeraden Exponenten selbst auch ungerade ist, d.h. dass der Graph dieser GRF punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems (0PS) ist. Viele wissen auch, dass für so eine 0PS-Funktion gilt

$$f(0 + x) + f(0 - x) = 0.$$

Wenn der Symmetriepunkt nun nicht bei $(0|0)$ wie bei 0PS, sondern am zuvor bestimmten Wendepunkt $W(x_w|y_w)$ liegt, so bedeutet Symmetrie nun:

$$\frac{1}{2}\big(f(x_w + h) + f(x_w - h)\big) = y_w$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. geht man symmetrisch vom Wendepunkt W ein beliebiges Stück h vom Wendepunkt weg, so bleibt der Mittelwert beim Wendepunkt.

Beweis:
Nutzen wir obigen Satz so folgt die Behauptung durch stumpfes Rechnen:

$$f\left(-\frac{b}{3a}+h\right)=d+c\left(-\frac{b}{3a}+h\right)+b\left(-\frac{b}{3a}+h\right)^2+a\left(-\frac{b}{3a}+h\right)^3=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d-\frac{b^2h}{3a}+ch+ah^3$$

und

$$f\left(-\frac{b}{3a}-h\right)=d+c\left(-\frac{b}{3a}-h\right)+b\left(-\frac{b}{3a}-h\right)^2+a\left(-\frac{b}{3a}-h\right)^3=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d+\frac{b^2h}{3a}-ch-ah^3$$

ergibt

$$\frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{b}{3a}+h\right)+f\left(-\frac{b}{3a}-h\right)\right)=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d$$

kurzum

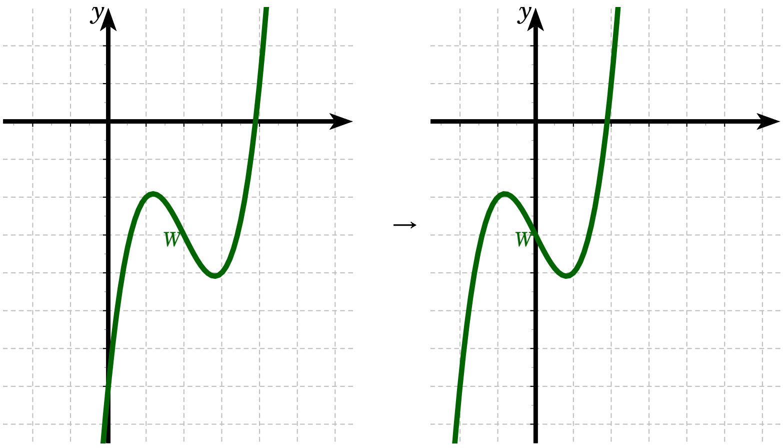
$$\frac{1}{2}\big(f(x_w+h)+f(x_w-h)\big)=y_w \qquad \forall h\in\mathbb{R}$$

Also: Jede GRF3 ist punktsymmetrisch zu W.

1.3 Nullstellen von GRF3

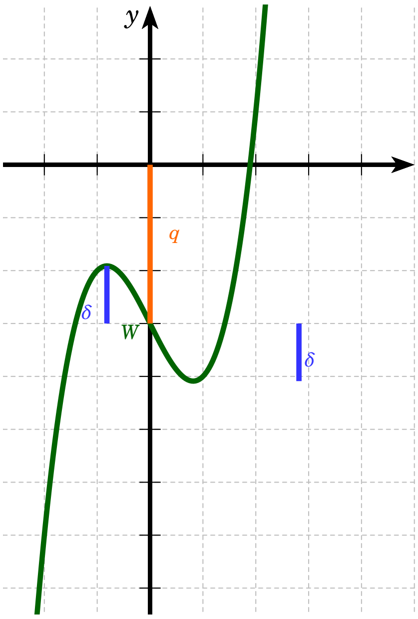
Diese liefert der TR bequem. Von Hand muss man tiefer in die Trickkiste greifen, denn obwohl GRF3 und GRF4 noch analytisch Nullstellen haben, gibt es für diese keine „einfache pq-Formel“ wie für GRF2. Wie in `http://www.warncke-family.de/g11a/quad_null.pdf` gezeigt kann man mit EPinweFni, Polynomdivision oder Horner-Schema voran kommen. Tatsächlich findet man sogenannte Cardanische Formeln, die sich aber kaum auswendig lernen lassen und in der Schule nicht behandelt werden. Nachdem wir aber nun von der Punktsymmetrie einer GRF3 überzeugt sind, können wir uns an die Cardanische Formel heran tasten.

Jede GRF3 hat mind. eine reelle Nullstelle x, die der Gleichung (NBfN) genügt: $a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=0$. Ersetzen wir in dieser Gl. x durch $x-\frac{b}{3a}$, so „schieben wir den Wendepunkt auf die y-Achse“: $\rightarrow a\cdot(x-\frac{b}{3a})^3+b\cdot(x-\frac{b}{3a})^2+c\cdot(x-\frac{b}{3a})+d=0$ im rechten Bild.



Für die Nullstelle x des verschobenen Graphen gilt statt $a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=0$ nun $\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d-\frac{b^2x}{3a}+cx+ax^3=0$ und der neue Graph zeigt Punktsymmetrie um den Punkt $(0|y_w)$ auf der y-Achse. Wenn eine GRF3 den Wendepunkt auf der y-Achse hat, so hat der Funktionsterm kein quadratisches Glied.

Die Nullstelle des verschobenen Graphen löst also $ax^3+(\frac{b^2}{3a}+c)\cdot x+y_w=0$, die sich durch $a\neq 0$ teilen lässt und ähnlich wie für GRF2 in eine „pq-Form bringen lässt“: $x^3+p\cdot x+q=0$. Hierbei ist $p=\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$ und $q=\frac{y_w}{a}=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$. Man sieht leicht, dass für $p\geq 0$ überhaupt nur eine einzige Nullstelle möglich ist, denn p gibt die Steigung der Tangente im Wendepunkt an und x^3 ist streng monoton steigend, was mit $p>0$ nur verstärkt würde. Ob es nun zwei oder drei Nullstellen geben kann, hängt von den Beziehungen von p und q ab.



$f(x) = x^3 + px + q$
Die Graphik veranschaulicht y-Achsenabschnitt q einerseits und Abstand δ zwischen q und Extremwert y_E andererseits. Offenbar gibt es nur eine Nullstelle, wenn $p \geq 0$ bzw. der Wert von δ kleiner als der Absolutwert vom y-Achsenabschnitt q ist: $\delta < q$. Die etwaigen Extrema erfüllen die NBfE: $f'(x_E) = 0$, also $x_E = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$, was natürlich nur für $p < 0$ sinnvoll ist. Einsetzen von x_E in $f(x)$ liefert die Extremwerte $y_E = q \pm \frac{2(\sqrt{-p})^3}{3\sqrt{3}}$ und somit $\delta = |\frac{2(\sqrt{-p})^3}{3\sqrt{3}}|$. Der Graph zeigt ein, zwei oder drei Nullstellen, wenn $\delta < q$, $\delta = q$ oder $\delta > q$. Man kann diese drei Beziehungen quadrieren und durch 4 teilen um die Entscheidung direkt mit p und q in einer „Diskriminante“ zu formulieren:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \begin{cases} > 0, & \text{dh. es gibt genau 1 Nullstelle} \\ = 0, & \text{dh. es gibt genau 2 Nullstellen} \\ < 0, & \text{dh. es gibt genau 3 Nullstellen} \end{cases}$$

Damit spielt $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ eine ähnliche Rolle wie die Diskriminante bei Nullstellen zu GRF2.

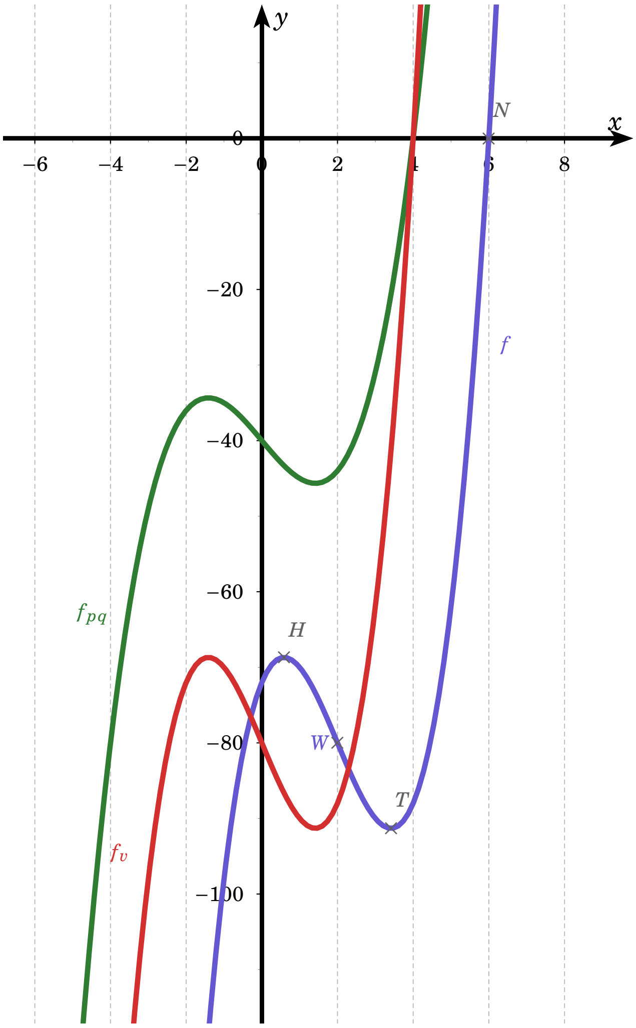
Man erhält die Cardanische Formel mit dem Ansatz für die Nullstelle $x = u + v$. Hier besteht eine gewisse Analogie zu der quadratischen Ergänzung zur Lösung der Nullstellen von GRF2. Statt zu einem Quadrat mit Kantenlänge $x + \frac{p}{2}$ wird nun zu einem Würfel mit Kantenlänge $u + v$ ergänzt. Mit dem Ansatz folgt $(u+v)^3 = u^3 + 3uv(u+v) + v^3 = 3uvz + u^3 + v^3$. Der Koeffizientenvergleich liefert: $-p = 3uv$und $-q = u^3 + v^3$. Kubieren ersterer Gleichung führt zu $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ und Multiplikation der zweiten Gleichung mit v^3 ergibt $-qv^3 = u^3v^3 + (v^3)^2$. In letzterer Gleichung können wir $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ einsetzen und erhalten eine quadratische Gleichung in $z = v^3$: $-qv^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 + (v^3)^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 + q \cdot z - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Diese löst man mit der bekannten „quadratischen pq-Formel“ zu $z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Lösen wir dies nach $v = \sqrt[3]{z}$ auf ergibt sich: $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Analoges Vorgehen mit u ergibt schließlich die Cardanische Formel

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

für eine der max. drei Nullstellen (für $p \geq 0$ bleibt es sowieso bei einer einzigen reellen Nullstelle.). Der praktische Nutzen ist eher gering, der Aufwand enorm, zumal man mit Polynomdivision oder Betrachtung komplexer Zahlen noch etwaige andere Nullstellen finden muss und nicht vergessen: alle Nullstellen wieder um $\frac{b}{3a}$ zurecht schieben muss. Dennoch: theoretisch ist es lehrreich und interessant und machbar.

Als Beispiel betrachten wir $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 12x - 72$. Nullstelle(n) sieht man nicht sofort, aber Extrema und Wendepunkt ist ein Klacks: $f'(x) = 6x^2 - 24x + 12$, NBfE $f'(x_E) = 0$ etc. liefern $x_H = 2 - \sqrt{2}$ und $x_T = 2 + \sqrt{2}$ für die Extremstellen und $f'(x) = 12x - 24$ NBfW $f''(x_W) = 0$ liefert die Wendestelle $x_w = 2$. Verschieben wir den Graphen von f so, dass der Wendepunkt auf die y-Achse verschoben wird, so ersetzen wir in $f(x)$ das x durch $(x+2)$, gesagt getan: $f_v(x) = 2(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + 12(x+2) - 72$. Hierbei müssen sich quadratische Glieder weg kürzen, so dass $f_v(x) = 2x^3 - 12x - 80$ übrig bleit (einfach nachrechnen). Schließlich teilen wir durch den Faktor 2 des führenden kubischen Gliedes und erhalten $f_{pq} = x^3 - 6x - 40$. Also ist $p = -6$ und $q = -40$. Das setzen wir in die Cardanische Formel ein: $x = \sqrt[3]{-\frac{-40}{2} - \sqrt{\left(\frac{-40}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-40}{2} + \sqrt{\left(\frac{-40}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{20 - \sqrt{400-8}} + \sqrt[3]{20 + \sqrt{400-8}} = \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 4$. Das

Blöde an der Cardanischen Formel ist, dass man kaum ohne TR darauf kommt, dass das Ergebnis gleich vier ist. Schließlich verschieben wir zurück mit: $(x \to x+2)$ und erhalten als Nullstelle $4+2=6$. Leider ist $p=-6<0$ und somit wären noch mehr Nullstellen denkbar, aber $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-8+400=392>0$, so dass wir weitere reelle Nullstellen ausschließen können. Die Zeichnung kann das Ergebnis verifizieren:



Die Bestimmung der Nullstelle im Bild. Wir beginnen mit der Ausgangsfunktion f, für die wir analytisch Hochpunkt H, Tiefpunkt T und Wendepunkt W berechnen können (sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse am absoluten Glied ablesen können). Den Schnittpunkt mit der x-Achse N, also die Nullstelle bestimmen wir mit der Cardanischen Formel. Hierzu verschieben wir den Graphen von f, so dass der Graph dann seinen Wendepunkt auf der y-Achse hat. Wir haben dann den roten Graphen f_v. Rechnerisch ist $f_v(x)$ aus $f(x)$ entstanden, indem wir x durch $(x-x_w)$ ersetzt haben. Schließlich normalisieren wir noch die Funktionsgleichung für $f_v(x)$, indem wir jeden Term durch a (den Faktor vor x^3) teilen und erhalten eine Art pq-Form $f_{pq}(x)$. Nun berechnen wir für f_{pq} mit der Cardanischen Formel die Nullstelle und schieben diese schließlich um x_w wieder nach rechts um die Nullstelle N von der Ausgangsfunktion f bestimmt zu haben.

2 Extrempunkt und GRF2

In der Sek I werden bereits ganzrationale Funktionen zweiten Grades (GRF2, Parabeln) analytisch untersucht, die zumindest einen Hoch- oder Tiefpunkt liefern.

Analog zu 1 kann man zwei mathematische Sätze zu diesen Parabeln beweisen, was vergleichsweise einfach und anschaulich sein sollte.

2.1 Jede GRF2 hat genau einen Extrempunkt E

Dieser Extrempunkt E heißt in der Sek I einfach Scheitelpunkt (bei nach unten geöffneten Parabeln erinnert der Scheitelpunkt an den Scheitel langhaariger Menschen). Dieser Satz ist besonders einfach zu zeigen, denn notwendig und hinreichend für E sind:

1. Ist x_E Extremstelle, so gilt dort $f'(x_E)=0$ (NBfE).

2. hinreichend für E: Ist $f'(x_E) = 0$ und gilt außerdem $f''(x_E) \neq 0$, so ist $E\big(x_E \big| f(x_E)\big)$ ein Extrempunkt der Funktion f.

Beweis:
Für eine GRF2 gilt der Ansatz

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

mit den Koeffizienten $b, c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. a, b, c sind irgendwelche Zahlen, aber a darf dabei nicht null sein, weil f dann höchstens eine lineare Funktion wäre.
Dann gilt für die Ableitungen:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a \neq 0$$

Nach Voraussetzung ist $a \neq 0$ und aus der notwendigen Bedingung für den Extrempunkt (NBfE) folgt dann die Lösung $x_E = -\frac{b}{2a}$ (oft wird dies auch als $x_E = \frac{-p}{2}$ formuliert) für die Extremstelle. Einsetzen dieser Lösung in den Ansatz ergibt die Koordinaten des Scheitelpunkts $E\big(x_E \big| f(x_E)\big)$:

$$E\left(-\frac{b}{2a} \middle| -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

x_E erfüllt die notwendige (NBfE) und die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt und ist die einzige Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$.

2.2 Jede GRF2 ist achsensymmetrisch zu E

Bekannt ist, dass eine GRF mit einer Funktionsgleichung mit nur geraden Exponenten selbst auch gerade ist, d.h. dass der Graph dieser GRF achsensymmetrisch zur y-Achse (YAS) ist. Viele wissen auch, dass für so eine YAS-Funktion gilt

$$f(0 + x) = f(0 - x).$$

Wenn die Symmetrieachse nun nicht bei 0 wie bei YAS, sondern an der zur y-Achse parallelen Achse durch die Extremstelle x_E liegt, so bedeutet Achsensymmetrie nun:

$$f(x_E + h) = f(x_E - h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. geht man symmetrisch vom Scheitelpunkt E ein beliebiges Stück h vom Scheitelpunkt weg, so finden wir den gleichen Wert symmetrisch zur Spiegelachse auch um h entfernt auf der anderen Seite.
Beweis:
Nutzen wir obigen Satz so folgt die Behauptung durch stumpfes Rechnen: $f(x_E + h) = c + b\left(-\frac{b}{2a} + h\right) + a\left(-\frac{b}{2a} + h\right)^2 = -\frac{b^2}{4a} + c + ah^2$ ist der Wert der quadratischen Funktion, wenn wir um h rechts von der Extremstelle auswerten. Und tatsächlich ergibt sich der gleiche Wert, wenn wir um h links von der Extremstelle auswerten: $f(x_E - h) = -\frac{b^2}{4a} + c + ah^2$. Also

$$f(x_E + h) = f(x_E - h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. alle quadratischen Funktionen (GRF2) sind achsensymmetrisch zu einer Achse die durch die Extremstelle x_E geht. Anschaulich:

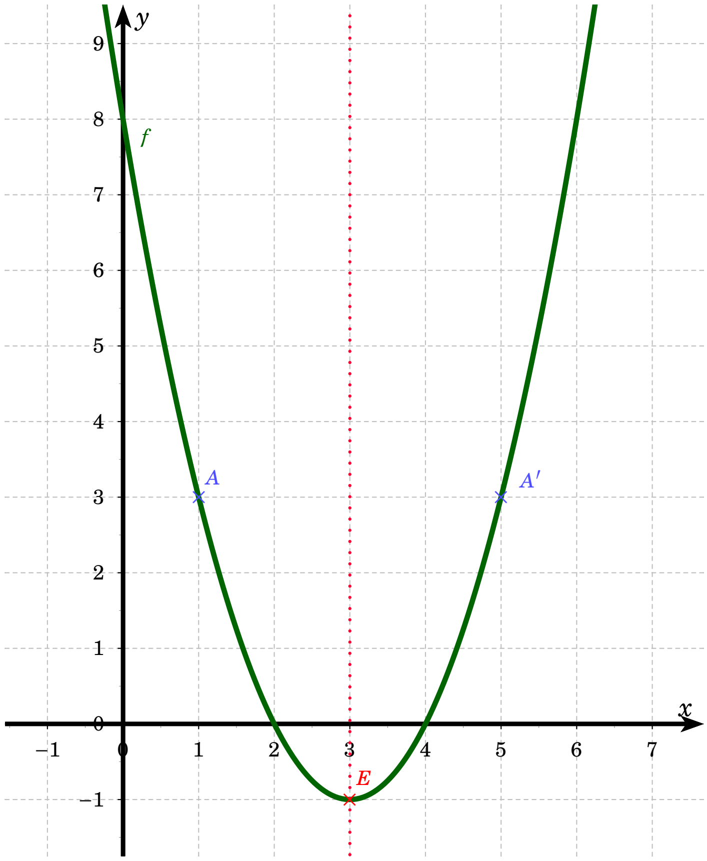
Als Beispiel betrachten wir die GRF2

$$f(x) = (x-3)^2 - 1$$

in der Scheitelpunktform, was besagt, dass eine nach oben geöffnete Normalparabel ihren Scheitelpunkt bei 3 auf der x-Achse und bei -1 auf der y-Achse hat. In der Normalform, also als gewöhnliche GRF2 aumultipliziert haben wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

wobei wir insbesondere erkennen, dass bei 8 der Graph die y-Achse schneidet.
Der Scheitelpunkt ist der Tiefpunkt bei $E(3|-1)$. Jede quadratische Funktion hat einen Tiefpunkt für $a > 0$, und analog einen Hochpunkt für $a < 0$. Man erkennt sofort die Achsensymmetrie um die rötlich gestrichelte Achse, die durch diesen Scheitelpunkt geht. Wenn wir für $h = 2$ einsetzen haben wir zueinander die symmetrischen Spiegelpunkte A und A'. Alles klar?



2.3 Nullstellen einer GRF2

Je nach Art und Lage des Extrempunktes hat eine GRF2 keine, eine oder zwei Nullstellen. Die Berechnung erfolgt z.B. mit der bekannten pq-Formel. Genaueres hierzu siehe `http://www.warncke-family.de/g11a/quad_null.pdf`.

3 GRF1

Damit sind echte Geraden mit $f(x) = a \cdot x + b$ gemeint. Zu diesen habe ich an anderer Stelle auch einiges geschrieben. In diesem Zusammenhang lässt sich festhalten: i) Jede GRF1 mit $a \neq 0$ hat eine Nullstelle bei $x = \frac{-b}{a}$. ii) Jede GRF1 ist monoton steigend mit $a > 0$ und monoton fallend mit $a < 0$. iii) Jede GRF1 ist punktsymmetrisch zum Punkt $(0|b)$ und jede Ursprungsgerade mit $b = 0$ hat 0Ps.