1 Definition: Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion heißt **ganzrational**, wenn sie sich auf die Form bringen lässt:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \,, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Diese Form bzw. zumindest der rechte Teil der Gleichung nennt man auch **Polynom**. Die Zahlen a_n bis a_0 heißen **Koeffizienten** des Polynoms (bzw. der ganzrationalen Funktion bzw. der Potenzen x^n bis $x^0 \equiv 1$). Der Koeffizient a_0 heißt Absolutglied und gibt den Wert der Funktion an, wo die y-Achse geschnitten wird („y-Achsenabschnitt“). Die höchste Hochzahl n (der größte Exponent) heißt **Grad**. Einige Beispiele machens deutlicher:

Funktionsbeispiel	Grad	Koeffizienten
$f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x - 11$	4	$a_4 = 5$, $a_3 = -3$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = -11$
$f(x) = -x^7 - x^5 - x^2 - 2x$	7	$a_7 = -1$, $a_6 = 0$, $a_5 = -1$, $a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = -1$, $a_1 = -2$, $a_0 = 0$
$f(x) = x^3 - 2x + 23$	3	$a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = -2$, $a_0 = 23$
$f(x) = (x^2 - 2)^2$	4	$a_4 = 1$, $a_3 = 0$, $a_2 = -4$, $a_1 = 0$, $a_0 = 4$, wie sich leicht durch Ausmultiplizieren bzw. dem 2. Binomischen Satz zeigen lässt.

2 Von Daten zur Funktion

Die Wertetabellen gehören jeweils zu einer ganzrationalen Funktion. Finde zu den Daten eine passende Funktionsgleichung.

1.

x	1	2	3	4
y	1	8	27	64

$a_3 = 1$

2.

x	1	2	3	4
y	5	6	7	8

$a_1 = 1$, $a_0 = 4$

3.

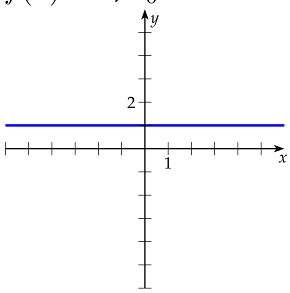
x	1	2	3	4
y	2	5	10	17

$a_2 = 1$, $a_0 = 1$

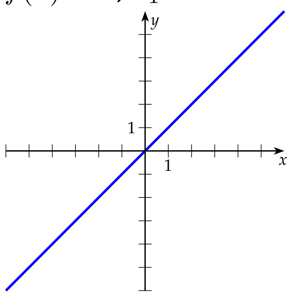
3 Bekannte Funktionen?

Gib jeweils die Funktionsgleichung an und ob es sich um eine ganzrationale Funktion handelt: Ganzrationale Funktionen haben Koeffizienten a_i (Funktionen ohne Koeffizient a_i sind nicht ganzrational).

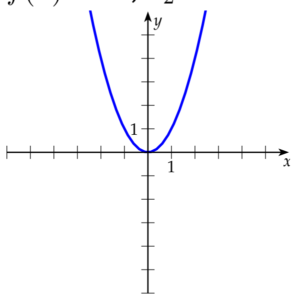
1. $f(x) = 1$, $a_0 = 1$



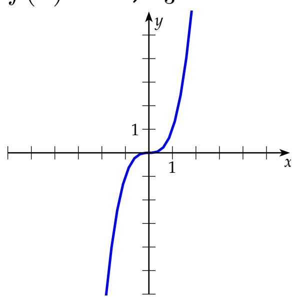
2. $f(x) = x$, $a_1 = 1$



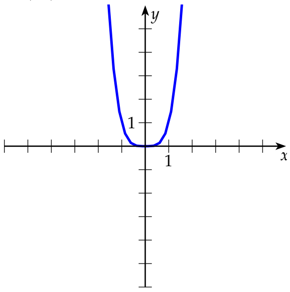
3. $f(x) = x^2$, $a_2 = 1$



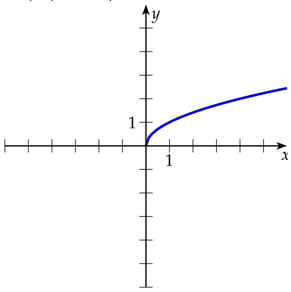
4. $f(x) = x^3$, $a_3 = 1$



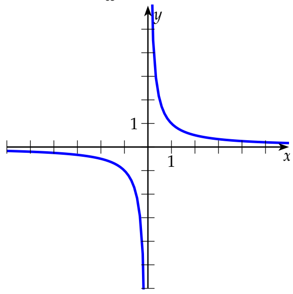
5. $f(x) = x^4$, $a_4 = 1$



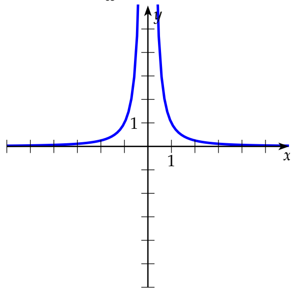
6. $f(x) = \sqrt{x} = x^{0,5}$



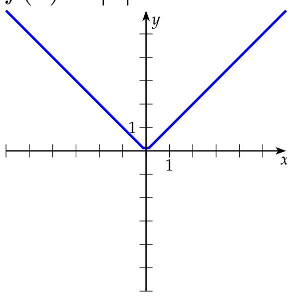
7. $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$



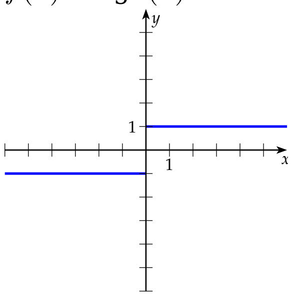
8. $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$



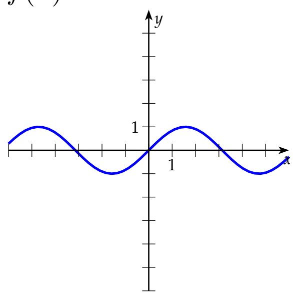
9. $f(x) = |x|$



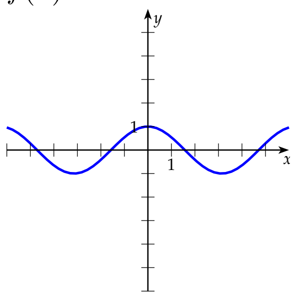
10. $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$



11. $f(x) = \sin x$



12. $f(x) = \cos x$



4 Zusatzaufgaben

- Gib für jede Funktion die maximale Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge an. $D_{\max} = \mathbb{R}$ für alle Funktionen bis auf 6.–8., denn für 6. $D_{\max} = \mathbb{R}^+$, d.h $x > 0$, und für 7. und 8. ist $D_{\max} = \mathbb{R}\backslash 0$, d.h. $x \neq 0$.
- Kann der Graph im abgebildeten Bereich ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden (stetige Funktion)? Alle sind stetig bis auf 7., 8. und 10.
- Ist die Funktion monoton steigend? 2., 4. und 6. streng genommen ja, der Rest nur teilweise.
- Liegt Symmetrie zum Ursprung (0PS) oder zur $y-$Achse (YAS) vor? Wenn ja, welche Eigenschaften haben dann die Hochzahlen der Funktion? Funktionen nur mit „geraden“ Exponenten (0,2,4,...) sind YAS, nur mit ungeraden Exponenten (1,3,5,...) sind 0PS.
- Wie ist das Verhalten der Funktion „im Unendlichen“, d.h. für $x \to -\infty$ („links“) bzw. für $x \to \infty$ („rechts“)? Bestimmt durch den Term mit dem höchsten Exponenten bei ganzrationalen Funktionen:

$x \to -\infty$ („links“)	$x \to \infty$ („rechts“)	Term mit dem höchsten Exponenten
$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n = \infty$	$\lim_{x\to\infty} a_n x^n = \infty$	für $a_n > 0$ und n gerade, z.B. x^4, $a_4 = +1$
$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$	$\lim_{x\to\infty} a_n x^n = -\infty$	für $a_n < 0$ und n gerade, z.B. $-x^4$, $a_4 = -1$
$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$	$\lim_{x\to\infty} a_n x^n = \infty$	für $a_n > 0$ und n ungerade, z.B. x^3, $a_3 = +1$
$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n = \infty$	$\lim_{x\to\infty} a_n x^n = -\infty$	für $a_n < 0$ und n ungerade, z.B. $-x^3$, $a_3 = -1$